MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 16: Raices de la unidad y Polinomios

23 de agosto de 2018

- Si $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$, entonces existe algún $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \varphi + 2k\pi$.
- Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raiz n-ésima de la unidad si $z^n = 1$.
- Las raices n-ésimas de la unidad son de la forma $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ con $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
- Sea $z, w \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raiz n-ésima de w si $w^n = 1$.
- Las raices n-ésimas de $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ son de la forma $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ con $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
- Sea $n \geq 2$. La suma de las n raíces n-ésimas de la unidad vale 0.
- Consideraremos a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ como el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un polinomio es una función $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ de la forma:

  $$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

  donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes en $\mathbb{K}$ a las que llamaremos coeficientes.
- Al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ se le denota $\mathbb{K}[x]$.
- Sean $p, q \in \mathbb{K}[x]$.

  $p = q \iff$ Los coeficientes de p y q son iguales.
- Sea $p \in \mathbb{K}[x]$. Definimos $\text{gr}(p)$ (el grado) como el k más grande tal que $a_k \neq 0$. Si $p \equiv 0$, diremos que $\text{gr}(p) = -\infty$.
- Diremos que $p \in \mathbb{K}[x]$ es mónico si el coeficiente asociado a $x^{\text{gr}(p)}$ es 1.
- Sea $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ definimos:

  1. $(p+q)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)x^k$
  2. $(pq)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k$

  Estas operaciones verifican:

  1. $\text{gr}(p+q) \leq \text{máx}\{\text{gr}(p), \text{gr}(q)\}$.
  2. $\text{gr}(pq) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$.
- $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad, que no posee divisores del 0.
- En $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$, los únicos elementos con inverso para $\cdot$ son los polinomios de grado 0.
- Sean $p, d \in \mathbb{K}[x]$ con $d \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tal que:

  1. $p = qd + r$.
  2. $\text{gr}(r) < \text{gr}(d)$.

  A r lo llamaremos resto. Si $r \equiv 0$, diremos que d divide a p y lo denotaremos por $d|p$.
- **Teorema del Resto:** Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ y $c \in \mathbb{K}$. El resto de dividir p por el polinomio $(x - c)$ es $p(c)$.
- Diremos que $c \in \mathbb{K}$ es una raíz de $p \in \mathbb{K}[x]$ si $p(c) = 0$.
- Si $c_1, c_2, \dots, c_k$ son raíces distintas de p, entonces:

  $$(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_k) | p(x)$$
- Sea $n \geq 1$. Si $p \in \mathbb{K}[x]$ es tal que $\text{gr}(p) = n$, entonces p posee a lo más n raíces distintas.
- Sea $n \geq 1$ y $p, q \in \mathbb{K}[x]$ tales que $\text{gr}(p) \leq n$ y $\text{gr}(q) \leq n$. Si p y q coinciden en $n+1$ puntos distintos, entonces son iguales.
- **Teorema Fundamental del Álgebra:**
  Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces p posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.
- Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces existen $\alpha, c_1, \dots c_m \in \mathbb{C}$ y $l_1, \cdots l_m \in \mathbb{N}$ tales que:

  $$p(x) = \alpha(x - c_1)^{l_1} \dots (x - c_m)^{l_m}$$

- Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ y sea $z \in \mathbb{C}$ una raiz de p. Entonces $\overline{z}$ es una raiz de p.
- Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces existen valores $\alpha, c_1, \ldots, c_m, a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s \in \mathbb{R}$ tales que:
  $p \equiv \alpha(x - c_1) \ldots (x - c_m)(x^2 + a_1 x + b_1) \ldots (x^2 + a_s x + b_s)$
- **Teorema de la Raíz Racional:** Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Si r y s son primos relativos tal que $\frac{r}{s}$ es una raíz de p, entonces:
  $$r|a_0 \quad \wedge \quad s|a_n$$
- Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ mónico con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Entonces toda raíz racional de p es entera y divide a a_0.
- El algoritmo de Ruffini permite dividir un polinomio p por $x - c$.

P1. [Raices de un Complejo]

Encuentre las raíces cuartas del complejo $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$

P2. [Solución de polinomios]

Demuestre que las soluciones de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ son raíces cúbicas de la unidad.

Hint: no calcule las raices del polinomio

P3. [Sumatoria de Raices de la Unidad]

Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento de manera creciente).

a) Demuestre que:
$$w_0 w_1 + w_1 w_2 + \ldots + w_{n-2} w_{n-1} + w_{n-1} w_0 = 0$$

b) Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$:
$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$$

c) Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Calcule:
$$\sum_{j=0}^{n-1} (z + w_j)^n$$

P4. [Factorización en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$]

a) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

b) Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$. Se sabe que i es raiz de $p(x)$ de multiplicidad 2. Encuentre todas las raices y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

P5. [¿Polinomios biyectivos?]

Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

a) Demuestre que $p(x)$ es sobreyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) \geq 1$.
Hint : Puede ser útil el teorema fundamental del álgebra.

b) El objetivo de esta parte es probar que $p(x)$ es inyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) = 1$.

(i) Demuestre que si $\text{gr}(p) = 1$, entonces $p(x)$ es inyectivo.

(ii) Demuestre que si $\text{gr}(p) < 1$, entonces $p(x)$ no es inyectivo.

(iii) Sea $n > 1$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$. Definamos $q \in \mathbb{C}[x]$ como:
$$q(x) = \lambda(x - a)^n$$
Demuestre que $q(x)$ no es inyectivo.

(iv) Concluya la dirección que falta.