MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 13: Estructuras Algebraicas

02 de agosto de 2018

P1. Se define $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna $*$ por

$$(a.b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

a) Estudiar conmutatividad y asociatividad de $*$

b) Determine el neutro de $(\mathbb{R}^2, *)$

c) Determine qué elementos son invertibles para $*$ y calcule sus inversos.

d) Determine los elementos idempotentes de $(\mathbb{R}^2, *)$

P2. Sea $(S, \star)$ una estructura algebraica con neutro e y $\star$ una operación asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $\star$ y con inverso $a^{-1} \in S$, definimos una nueva operación $\triangle$ en S dada por:

$$(\forall x, y \in S) \qquad x \triangle y = x \star a \star y.$$

a) Demuestre que $\triangle$ es una ley de composición interna (en adelante, l.c.i.) asociativa.

b) Determine si $\triangle$ tiene neutro, y calcúlelo en caso de existir.

c) Caracterice los elementos invertibles para $\triangle$, y calcule el inverso de a con respecto a $\triangle$.

P3. [Tablas]

a) Sea $(S, *)$ una estructura algebraica dado por la siguiente tabla: Determine si $*$ es asociativa en S

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	a

b) Considere $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$

1) Construya la tabla para la operación $\cdot_5$ en $\mathbb{Z}_5$
2) Expliqué por que $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ no es un grupo.
3) Muestre que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano.

Recuerdo: un grupo es una estructura algebraica que es asociativo, posee neutro y todo elemento es invertible.

P4. [¿Cuantos morfismos?]

Sea $m \in \mathbb{N}$ y $\varphi : (\mathbb{Z}_m, +_m) \to (\mathbb{Z}, +)$ un homomorfismo cualquiera. Determine el neutro de $\mathbb{Z}_m$ y Demuestre que $\varphi \equiv 0$, es decir, φ es la función constante igual a 0.

P5. Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ por:

$$x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$$

Muestre que la biyección $f(x) = x^5$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$ y que tambien es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, \cdot)$. Donde las operaciones $+$ y $\cdot$ son la suma y producto usuales en $\mathbb{R}$

- Dado un conjunto A no vacío. Diremos que $*$ es una ley de composición interna (l.c.i) si $*$ es una función

$$\begin{aligned} * : A \times A &\to A \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned}$$

- Si $*$ es una l.c.i definida en un conjunto A, entonces al par $(A, *)$ lo llamaremos **estructura algebraica**.
  Si sobre A tenemos definida una segunda operación $\triangle$, denotaremos $(A, *, \triangle)$ a la estructura algebraica que considera ambas l.c.i en A

- Sea $(A, *)$ una estructura algebraica.

  1. Diremos que $*$ es **asociativa** si

     $$\forall x, y, z \in A, (x * y) * z = x * (y * z)$$

  2. Sea $e \in A$. Diremos que e es elemento **neutro para *** si

     $$\forall x \in A, e * x = x * e = x$$

  3. Si $e \in A$ es el neutro para $*$, diremos que $x \in A$ es **invertible si:**

     $$\exists y \in A, y * x = x * y = e$$

     En tal caso, diremos que existe inverso de x y más aun y es un inverso de x

  4. Diremos que $*$ es **conmutativa** si

     $$\forall x, y \in A, x * y = y * x$$

  5. Sea $a \in A$. Diremos que a es **absorbente** si:

     $$\forall x \in A, x * a = a * x = a$$

  6. Sea $a \in A$. Diremos que a es **idempotente** si $a * a = a$

  7. Sea $a \in A$. Diremos que a es **cancelable** si $\forall y, z \in A$ se tienen:

     $$a * y = a * z \Rightarrow y = z$$

     $$y * a = z * a \Rightarrow y = z$$

  8. Sea $(A, *, \triangle)$ una estructura algebraica con dos operaciones. Diremos que $\triangle$ **distribuye** con respecto a $*$ si para todo $x, y, z \in A$, se tienen:

     $$x \triangle (y * z) = (x \triangle y) * (x \triangle z)$$

     $$(y * z) \triangle x = (y \triangle x) * (z \triangle x)$$

- Sea (A,*) una estructura algebraica. Se tiene que $a \in A$ es cancelable si y sólo si las funciones I_a y D_a definidas por $I_a(x) = a * x$ y $D_a(x) = x * a$ para $x \in A$, son inyectivas.

- En una estructura algebraica $(A, *)$, el elemento neutro es **único**.

- Si la estructura algebraica $(A, *)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos son unicos.
  De esta forma el inverso de $x \in A$, lo podemos denotar sin ambigüedad como x^{-1}

- Sea $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa y con neutro $e \in A$ entonces:

  1. Si $x \in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aun, $(x^{-1})^{-1} = x$
  2. Si $x, y \in A$ son invertibles entonces $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$
  3. Si $x \in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.

- Se define $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\equiv_n$. A partir de esto podemos definir:

  - $[x]_n + [y]_n = [x + y]_n$
  - $[x]_n \cdot [y]_n = [x \cdot y]_n$

  Recordemos además que si $x \equiv_n y$, entonces $[x]_n = [y]_n$

- Sea $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 \equiv_n x_2$ y $y_1 \equiv_n y_2$. Entonces

  $$(x_1 + y_1) \equiv_n (x_2 + y_2) \text{ y } (x_1 \cdot y_1) \equiv_n (x_2 \cdot y_2)$$

  Es decir, si $[x_1]_n = [x_2]_n$ y $[y_1]_n = [y_2]_n$, entonces

  $$[x_1 + y_1]_n = [x_2 + y_2]_n \text{ y } [x_1 \dot{y}_1]_n = [x_2 \cdot y_2]_n$$

- (*Notación*) $x \equiv_n y \iff x = y \pmod{n}$