Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002/2 - Cálculo Diferencial e Integral

Auxiliar 11 - Integrales Impropias

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Javier Gómez

- La integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$, si no diverge ($\alpha \leq 1$).
- La integral $\displaystyle\int_a^{b^-} \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$, si no diverge ($\alpha \geq 1$).
- **Convergencia absoluta:** Si $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ y la integral $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge también.
- **Criterio de comparación:** Si f, g son continuas en $[a, \infty)$ y $g(x) \geq f(x)$ a partir de cualquier punto $b \in \mathbb{R}$, entonces si $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ converge $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge también (lo mismo para las de segunda especie).
- **Criterio de cuociente:** Si f, g son (i) continuas en $[a, \infty)$, (ii)no negativas a partir de cualquier punto $b \in \mathbb{R}$ y (iii) tales que el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = L \neq 0$, entonces las integrales $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ y $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ ambas convergen o ambas divergen.

P1. Considere la función $f(x) = 1/x$, con $x \in [1, +\infty)$. Calcule el volumen del sólido de revolución y el manto de revolución en torno al eje OX generado por $f(x)$. Muestre que el volumen converge pero la superficie del manto no.

P2. Estudie la convergencia de $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \ln(x)\mathrm{d}x$. Lo mismo para $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^x \mathrm{d}x$, y para $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p + x^q}$, donde $p > 1$ y $0 < q < 1$.

P3. Pruebe que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ convergen. Para esto, estudie la convergencia absoluta de $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$. Luego debe integrar por partes para obtener el resultado.

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función decreciente y derivable en $\mathbb{R}$, tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Muestre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f'(x)|\mathrm{d}x$ converge.