Auxiliar 10 - Curvas

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Javier Gómez

Considere Γ una curva en $\mathbb{R}^3$ y $\vec{r}(t)$, $t \in [a,b]$ una parametrización regular.

- La **longitud de la curva** se calcula como $L(\Gamma) = \int_a^b |\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}|\mathrm{d}t$. Esto define la función **longitud de arco** $s : [a,b] \to [0, L(\Gamma)]$ como la integral $s(t) = \int_a^t |\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}|\mathrm{d}t$.
- Se define una **parametrización en longitud de arco** para Γ como $\vec{\sigma}(s) = \vec{r}(t(s))$. El **vector tangente** es entonces $\vec{T}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}}{\mathrm{d}s}(s)$. Nótese que es unitario.
- La **curvatura** se define $\kappa(s) = |\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}(s)|$. El **vector normal** es $\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}(s)$, también unitario.
- Finalmente el **vector binormal** se define como $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$ (unitario), y la **torsión** se escribe como $\tau(s) = -\vec{N}(s) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{B}(s)}{\mathrm{d}s}$.
- Los vectores $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ son linealmente independientes y cumplen las **fórmulas de Frenet**: $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\vec{N}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\vec{N}.$

P1. Encuentre una parametrización y el largo total de la curva obtenida al intersectar las superficies $S_1 : x^2 + y^2 = r^2$ y $S_2 : z = \arccos\frac{x}{r}$.

P2. Una partícula se mueve describiendo una trayectoria Γ_{θ_0} sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$, de forma que su altura z y el ángulo θ en coordenadas cilíndricas cumple la relación $z = e^{-\theta}$ con $\theta \in [0, \theta_0]$.

- Encuentre una parametrización para Γ_{θ_0}. Dibuje la curva.
- Calcule el largo de Γ_{θ_0} y estudie que pasa cuando $\theta_0 \to \infty$. Encuentre la parametrización natural de Γ_∞.

P3. Una curva Γ define un punto P_0 por el cual pasan todas las rectas normales de Γ, es decir el punto se escribe como $P_0 = \vec{\sigma}(s) + \phi(s)\vec{N}(s)$, donde $\phi(s)$ es una función real definida en $s \in [0, L(\Gamma)]$. Demuestre que Γ es una curva plana.

P4. Una curva regular está contenida en la superficie de una esfera de radio r_0. Demuestre que $\vec{T}(s) \cdot \vec{\sigma}(s) = 0$ y que $\kappa(s)\vec{N}(s) \cdot \vec{\sigma}(s) = -1$. Concluya que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right) = \frac{\tau}{\kappa}.$$