# Auxiliar 9 - Volúmenes y Curvas

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Javier Gómez

- Consideremos la región $R = \{(x,y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Entonces las coordenadas del **centro de gravedad** (centroide) son

$$X_G = \frac{\int_a^b x f(x) \mathrm{d}x}{\int_a^b f(x) \mathrm{d}x}, \quad Y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x}{\int_a^b f(x) \mathrm{d}x}$$

.

- El **teorema de Pappus–Guldin** indica que el volumen $V$ que se obtiene de rotar una figura plana $F$ en torno a un eje externo es el producto del aŕea de $F$ y la distancia recorrida por el centroide de $F$.

**P1.** Sea $\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^+$ una función integrable, con $\beta - \alpha \leq 2\pi$, y que define una curva en coordenadas polares $\rho(\phi)$. Explicar geométricamente por qué el **área de la región** $R = \{(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) : \phi \in [\alpha, \beta], \rho \in [0, \rho(\phi)]\}$ es $A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(\phi)^2 \mathrm{d}\phi$.

**P2.** Muestre que el volúmen del sólido de revolución generado por la rotación de la región polar anterior (restringida a la mitad del plano cartesiano $x > 0$) en torno al eje $OY$ es

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho(\theta)^3 \cos(\theta) \mathrm{d}\theta.$$

**P3.** Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva $\Gamma$. Demuestre que el largo de la curva $[\alpha, \beta]$ es

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} \mathrm{d}\theta.$$

**P4.** Usando el resultado anterior demuestre que si $f'(\theta) = a f(\theta)$ con $a \in \mathbb{R}$, la curvatura de $\Gamma$ para todo $\theta$ es

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{\sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}}.$$

Encuentre el largo total de la curva (desde $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$) y la curvatura en cualquier punto para $\rho = e^{-k\theta}$.