Auxiliar Extra - Trabajo Dirigido C2/2

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Javier Gómez

P1. Considere la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-s^2} \mathrm{d}s$. Se pide:

(a) Calcular F' y F''.

(b) Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-s^2}\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}/2$, bosquejar la función F.

P2. La función f es suave, es decir tiene derivadas continuas de todo orden, y cumple $f(0) = 1$, $f(2) = 3$ y $f'(2) = 5$. Calcule $\displaystyle\int_0^1 x f''(x)\mathrm{d}x$.

P3. Determinar la única función que satisface $(x^3+1)f(x) - 3\displaystyle\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t = \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + 1$.

P4. Sea f una función continua tal que $\displaystyle\int_0^x tf(t) = \sin x - x\cos x$. Encontrar $f(\pi/2)$ y $f'(\pi/2)$.

P5. Dada la función $f(x) = \displaystyle\int_x^2 \frac{1}{\sqrt{(1+x^3)}}\mathrm{d}x$, usando el el segundo TFC calcular $\displaystyle\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x$. Puede serle útil considerar la función $g(2) - g(x)$ donde $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

P6. Calcular $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$, $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x$, y $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cot\theta\sec^2\theta}{1+\cot\theta}\mathrm{d}\theta$.

P7. Se define para n natural $I_n = \displaystyle\int \frac{x^n}{1+x}$. Demostrar que $(1+2n)I_n = (2x^n\sqrt{1+x}) - 2nI_{n-1}$.

P8. Identificar la suma

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln n + i - \ln n}{n}$$

como suma de Riemann, determinando la función y partición involucradas. Calculando su valor en el límite $n \to \infty$.

P9. Sea $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. ¿Cuál es el valor de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_{2n} - S_n$?