P1| $I_{m,n} = \int_0^1 x^n (1+x)^m \, dx$. Por partes $\left.\begin{array}{l} u = x^n \\ v' = (1+x)^m \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u' = n x^{n-1} \\ v = \frac{1}{(m+1)}(1+x)^{m+1} \end{array}\right\}$ y $I_{m,n} = \frac{x^n}{m+1}(1+x)^{m+1}\Big|_0^1 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{n-1}(1+x)^{m+1} dx$

$$= \frac{2^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1} I_{n-1,\, m+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (m+1) I_{m,n} + n I_{n-1,\, m+1} = 2^{m+1} \quad //$$

P2| (a) $\int_a^b f^{-1}(x)dx$, por partes $\left.\begin{array}{l} u = f^{-1}(x) \\ v' = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u' = \frac{df^{-1}(x)}{dx} \\ v = x \end{array}\right\}$ es

$$= x f^{-1}(x)\Big|_a^b - \int_a^b x \cdot \underbrace{\frac{df^{-1}(x)}{dx} dx}_{\text{(cambio variable)}} = x f^{-1}\Big|_a^b - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} x \, df^{-1}(x),$$

pero $x = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow \quad = x f^{-1}\Big|_a^b - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)dx$ $\left(\begin{array}{c}\text{pusimos} \\ df^{-1} \to x\end{array}\right)$ //

(b) Ocupando (a) y que $\arcsin\frac{1}{2} = \pi/6$ $\left(\sin \pi/6 = \frac{1}{2}\right)$,

$$\int_0^{1/2} \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x \Big|_0^{1/2} - \int_0^{\pi/6} \sin x \, dx = \pi/12 + (\cos x)\Big|_0^{\pi/6}$$

$$= \pi/12 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \quad //$$

Ahora usando $\arctan 1 = \pi/4$, $\int_0^1 \arctan x \, dx = x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

Vemos que $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$, con $u = \cos\theta$, $= -\int \frac{du}{u} = -\ln|\cos x| + cte$

tenemos

$$\int_0^1 \arctan x = \pi/4 + (\ln|\cos x|)\Big|_0^{\pi/4} = \pi/4 + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} \quad //$$

Por último como $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Rightarrow 2ye^x = e^{2x} - 1$, esto es una cuadrática para $u = e^x$, solo nos sirve sol. positiva (la otra siempre es < 0)

$$\Rightarrow u = e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} = y + (y^2+1)^{1/2},$$

entonces $x = \ln(y + (y^2+1)^{1/2})$. Aplicando (a) $(\sinh^{-1} 0 = 0)$

$$\int_0^{\sinh t} \ln(x+(x^2+1)^{1/2})\,dx = x \sinh^{-1} x \Big|_0^{\sinh t} - \int_0^t \sinh x\, dx = t\sinh t + 1 - \cosh t$$

//

P3| Hacemos una partición de $2N$ intervalos, N equiespaciados entre 0 y a, y otros N equiespaciados entre a y b

$$\Rightarrow \quad S(f,P) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a}{N} + \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{b-a}{N}\, g(x_{k-1})$$

$\rightarrow M_k = g(x_{k-1})$ por ser decreciente

$m_k = g(x_k)$

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a}{N} + \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{b-a}{N}\, g(x_k)$$

$$\Rightarrow \quad S(f,P) - s(f,P) = \frac{b-a}{N} \sum_{k=N+1}^{2N} g(x_{k-1}) - g(x_k)$$

telescópica $= \dfrac{b-a}{N}\left(g(a) - g(0)\right) = \dfrac{(b-a)u}{N}$

Tomando $N = \dfrac{(b-a)(u+1)}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$ //

Claramente la segunda suma (2da partición) es equivalente a una partición y suma que cumplen la condición de Riemann por si mismas. La primero también, luego

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^a 1\,dx + \int_a^b g\,dx = a + \int_a^b g(x)\,dx.$$

//

P4| Hacemos una partición de $2N$ equiespaciada, la suma superior es

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{2a}{2N} M_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{a}{N} M_k + \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{a}{N} M_k$$

La primera suma es una partición equiespaciada desde $-a$ a 0, pero ya que $f(x) = f(-x)$, tenemos que $M_k = M_{k+N}$ para $k = 1, \dots, N$, es decir podemos interpertar la partición como de 0 a a.

$$\Rightarrow \quad S(f, P) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a}{N} M_{k+N} + \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{a}{N} M_k$$

$$= \frac{2a}{N} \sum_{k=N+1}^{2N} M_k$$

En el límite esto es $2 \int_0^a f(x)\,dx$ por enunciado (es integrable).

<u>PS1</u> Si $G(x) = \int_a^x g(x)\,dx \Rightarrow G'(x) = g(x)$. $(G(a) = 0)$

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = f(x) G(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) G(x)\,dx$$

(sale del PS - AUX7)

Ahora, el TVM generalizado para integrales nos dice que si $u(x)$ es continua y $v(x)$ integrable $\exists \xi \in (a,b)$

$$\int_a^b u(x) v(x)\,dx = u(\xi) \int_a^b v(x)\,dx,$$

usando esto con $u = G$, $v = f'$

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = f(b) G(b) - G(\xi) \int_a^b f'(x)\,dx$$

$$= f(b) G(b) + G(\xi)(f(a) - f(b))$$

esto es lo que queríamos probar //