

Auxiliar 8 - Aplicaciones de la Integral

Profesor: Raúl Uribe

Auxiliar: Javier Gómez

- Sea $r(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$ una curva. Entonces la **longitud de arco** de curva está dada por $\int_a^b \|x'(t), y'(t)\| dt$.
- Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y diferenciable. Entonces el área del **manto de revolución** en torno al eje OX está dado por $A_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.
- Consideremos la región $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Entonces el **volumen de revolución** en torno al eje OX es $V_{OX} = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$. Para eje OY es $V_{OY} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$.
- Sea $\rho : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función integrable, con $\beta - \alpha \leq 2\pi$, y que define una curva en coordenadas polares $\rho(\phi)$. Entonces el **área de la región** $R = \{(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) : \phi \in [\alpha, \beta], \rho \in [0, \rho(\phi)]\}$ es $A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho(\phi)^2 d\phi$.

- P1.** Sea $f(x) = -6x^2 + 5x + 1$. Considere sobre la parábola el punto $(a, f(a))$, con $a \geq 0$. Demuestre que el área comprendida entre la parábola y el segmento que une $(0, 1)$ con $(a, f(a))$ es igual a^3 .
- P2.** Para $\alpha \in (0, 1)$ sea R la región encerrada por la curva $f(x) = x^\alpha$, el eje OY y la recta tangente a f en el punto $x_0 = 1$.
- Demostrar que el área de R está dada por $A = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2(1 - \alpha)}$.
 - Demostrar que el volumen del sólido generado por la rotación de la región R en torno al eje OY es $V_{OY} = \pi$.
- P3.** Dado $a > 0$ definimos la curva $9ay^2 = x(x - 3a)^2$. Calcular el perímetro de aquella parte que forma un lazo cerrado. Justifique con un dibujo de la curva.
- P4.** Determinar el área encerrada por la curva $(x^2 + y^2 - c^2)(x^2 + y^2) = 4a^2x^2$. Puede ser útil considerar coordenadas polares.
- P5.** Graficar y calcular el área de $\rho(\theta) = a(1 - \sin \theta)$ entre $\theta \in [0, 2\pi]$. Repita para $\rho(\theta) = 1 + 2 \sin(\theta)$.