

Auxiliar Extra - Trabajo Dirigido C2

Profesor: Raúl Uribe

Auxiliar: Javier Gómez

P1. Dada la integral $I_{m,n} = \int_0^1 x^n(1+x)^m dx$ probar que $(m+1)I_{m,n} + nI_{m+1,n} = 2^{m+1}$.

P2. (a) Sea f una función continua y biyectiva en $[a, b]$. Pruebe que

$$\int_a^b f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x)\Big|_a^b - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)dx.$$

(b) Calcule $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$ y $\int_0^1 \arctan x dx$. Determine $\sinh^{-1}(x)$, y demostrar que si $t \geq 0$:

$$t \sinh t + 1 - \cosh t = \int_0^{\sinh t} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})dx.$$

P3. Considere la función $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a), \\ g(x) & \text{si } x \in [a, b), \end{cases}$$

con $a < b$ y $g(x)$ una función decreciente en $[a, b]$ que cumple $g(a) = n$ y $g(b) = 0$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Usando la condición de Riemann demostrar que f es integrable en $[a, b]$ y que

$$\int_0^b f(x)dx = a + \int_a^b g(x)dx.$$

P4. Sea $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y par. Usando sumas de Riemann, pruebe que $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

P5. Sean f, g funciones continuas en $\mathbb{R}$, con f monótona, derivable y con derivada continua. Demuestre que $\exists \xi \in [a, b]$ que satisface la ecuación

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

Para esto defina $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ e integre por partes.