

P11 Debemos siempre armar una suma de la forma

$$\sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i) \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Para equiespaciado

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

Para

$$\sum_{k=1}^n \frac{u}{u^2 + k^2} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{1}{u}}_{\Delta x_k = \frac{1-0}{u}} \underbrace{\frac{u^2}{u^2 + k^2}}_{f(\tilde{x}_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{u}\right)^2}$$

pues $\tilde{x}_k = \frac{k}{u} \in \left[\frac{k-1}{u}, \frac{k}{u}\right]$. Entonces $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{u}{u^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \stackrel{\text{por TFC}}{=} \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} //$$

(arctan 1 - arctan 0)

Para $\sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{u}\right)}{u}$ de nuevo $\Delta x_k = \frac{1-0}{u} = \frac{1}{u}$

y $\frac{k}{u} = \tilde{x}_i \Rightarrow f(x) = \sin(2\pi x)$. Luego

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u} \sin\left(\frac{2\pi k}{u}\right) &= \int_0^1 \sin(2\pi x) dx \stackrel{\text{TFC}}{=} \left[-\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x) \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2\pi} (\cos 2\pi - \cos 0) = 0. // \end{aligned}$$

P21 Primero mostremos $\frac{1}{u} \sqrt[u]{\frac{(zu)!}{u!}} = u \sqrt{\prod_{i=1}^u \left(1 + \frac{i}{u}\right)}$

Partamos con

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^u \left(1 + \frac{i}{u}\right) &= \prod_{i=1}^u \frac{(u+i)}{u} = \frac{u+1}{u} \cdot \frac{u+2}{u} \cdots \frac{u+u}{u} \\ &= \frac{1}{u^u} \frac{1 \cdot 2 \cdots u \cdots 2u}{1 \cdot 2 \cdots u} = \frac{1}{u^u} \frac{(zu)!}{u!} \end{aligned}$$

Tomando $\sqrt[u]{\quad}$

$$\Rightarrow \frac{1}{u} \sqrt[u]{\frac{(zu)!}{u!}} = u \sqrt{\prod_{i=1}^u \left(1 + \frac{i}{u}\right)}$$

El lado derecho tiene una multiplicatoria, para obtener una suma sacamos logaritmo

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1}{u} \sqrt[u]{\frac{(zu)!}{u!}} \right) &= \frac{1}{u} \ln \left(\prod_{i=1}^u \left(1 + \frac{i}{u}\right) \right) \\ &= \frac{1}{u} \sum_{i=1}^u \ln \left(1 + \frac{i}{u} \right) \end{aligned}$$

Nótese que $\Delta x_i = \frac{1-0}{u} = \frac{1}{u}$, $\tilde{x}_i = \frac{i}{u}$ entonces $f(x) = \ln(1+x)$

$$\Rightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{u} \sqrt[u]{\frac{(zu)!}{u!}} \right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

TFC
↓

Como $\int_0^1 \ln(1+x) dx = \left[(1+x) \ln(1+x) - (1+x) \right]_0^1$
 $= 2 \ln 2 - 2 + 1 = 2 \ln 2 - 1$

Concluimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} n \sqrt{\frac{(2n)!}{n!}} = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e} //$$

P31 (INT x PARTES $\int uv' = uv - \int u'v$)

① $\int_1^e x^2 \ln x dx$, por partes con $v' = x^2$
 $v = \frac{1}{3} x^3$, $u = \ln x$, $u' = \frac{1}{x}$

los mismos límites

$$\Rightarrow = \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{3} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{9} x^3 \Big|_1^e = \frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9}$$

② $\int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}^{3/2}} dx = \int_0^a \frac{a dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$ Se podría

intentar $u = (a^2 + x^2)^{1/2}$ pero esta forma resulta complicada de calcular*. Entonces debemos transformar el factor con x . Vemos que

$$\frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{a}{\left(x^2 \left(\frac{a^2}{x^2} + 1\right)\right)^{3/2}} = \frac{a}{x^3 \left(a^2/x^2 + 1\right)^{3/2}} (+) \text{ entonces}$$

* Por que $du = \frac{x}{u} dx$ nos falta el factor $x = \sqrt{a^2 - u^2}$

si tratamos $u = (a^2 x^{-2} + 1)^{1/2}$ (o $u = (a^2 x^{-2} + 1)^{-1/2}$)
 vemos que $du = \frac{1}{2} (a^2 x^{-2} + 1)^{-1/2} (-2a^2 x^{-3}) = -\frac{a^2}{x^3 u} dx$, sale un
 factor $\frac{1}{x^3}$.

$$\Rightarrow \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}^3} dx = \int_0^a \frac{a}{x^3 (a^2 x^{-2} + 1)^{3/2}} dx = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{a^2}{x^3 u^3} dx$$

por ec. (*)

$-\frac{du}{u^2}$

Para cambiar a du necesitamos saber los nuevos límites! - Cuando $x \rightarrow 0^+$, u tiende a ∞ .
 Como vimos, esto significa que tomamos el límite de la integral cuando el límite correspondiente (inferior en este caso) va a tal valor.
 Cuando $x = a \Rightarrow u = \sqrt{2}$. Entonces

$$= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{\sqrt{2}} \left(-\frac{du}{u^2} \right) = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{u} \right) \Big|_{\infty}^{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}a} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}^3} dx = \frac{1}{\sqrt{2}a} //$$

③ Integramos por partes con $v' = 1$ ya que $v' = (-\ln x)^u$ con $u > 1$ complica más todo. Entonces
 $u = (-\ln x)^{k-1} \Rightarrow u' = (k-1)(-\ln x)^{k-2} \left(-\frac{1}{x}\right)$, $v = x$

$$\Rightarrow \int_0^1 (-\ln x)^{k-1} dx = x(-\ln x)^{k-1} \Big|_0^1 + \int_0^1 (k-1)(-\ln x)^{k-2} dx$$

Nos sale una integral de la misma forma anterior y la parte integrada nuevamente la tomamos como el límite cuando $x \rightarrow 0^+$ ya que $x(-\ln x)^{k+1}$ no está definida en $x=0$. Vimos en clase que este límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(-\ln x)^{k-1} = 0$$

usando l'Hopital, luego $x(-\ln x)^{k-1} \Big|_0^1 = 0 - 0 = 0$. Entonces

$$I(k) = \int_0^1 (-\ln x)^{k-1} dx = (k-1) \int_0^1 (-\ln x)^{k-2} dx$$

$$\Rightarrow I(k) = (k-1) I(k-1)$$

Empezamos con $k=2 \Rightarrow I(2) = I(1)$ y

$$I(1) = \int_0^1 dx = 1 \Rightarrow I(2) = 1$$

Para el resto vemos que $2 \cdot I(2) = I(3) \dots$

$$I(k) \cdot k = I(k+1) \Rightarrow I(k) = (k-1)!$$

Esta integral define $I(1) = 0! = 1$.

P4 Sabemos que $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + cte$ luego

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt, \quad \arctan \frac{1}{x} = \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$$

Debemos cambiar variables en la segunda integral

según $t = \frac{1}{u} \Rightarrow du = -\frac{1}{t^2} dt = u^{-2} dt$. Para cambiar los límites vemos nuevamente que cuando $t \rightarrow 0^+$, $u \rightarrow \infty$, y cuando $t = \frac{1}{x} \Rightarrow u = x$. Luego

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{1/t^2}{1/t^2 + 1} dt = - \int_{\infty}^x \frac{du}{u^2 + 1}$$

Vimos que $-\int_b^a = \int_a^b$ y que u, t son variables mudas, luego

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_x^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

Entonces $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ es

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_x^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt,$$

ya que cuando evaluamos en la primitiva $F(x)$ se va lo anterior no depende de x , las integrales se juntan en x

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_x^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan t = \pi/2. //$$

PS1 como f es continua sabemos que

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad (F'(x) = f(x))$$

es continua para $x \in [a, b]$. Entonces por TVM
existe $\xi \in (a, b)$ + f

$$F(b) - F(a) = (b - a) F'(\xi) \quad \nearrow f(\xi)$$

Pero $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ por TFC luego

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a). //$$