AUX 6

P1| ① Debemos usar fraccs. parciales luego escribimos

$$\overset{\shortparallel}{\int} \sec x \, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$, y separamos

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right)$$ con $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$

$$\Rightarrow \textcircled{1} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{1-\sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + cte$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + cte$$. Veamos ahora que

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} = \left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2 = (\sec x + \tan x)^2$$

luego

$$\rightarrow \textcircled{1} = \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|^2 + cte = \ln|\sec x + \tan x| + cte$$

//

② y ③ Sea $I = \int \sin(\ln x) dx$ y $J = \int \cos(\ln x) dx$

Integrando por partes I con $u = \sin(\ln x)$, $v' = 1$:

$$I = x \sin(\ln x) - \int \cancel{x} \cos(\ln x)(\ln x)' dx = x\sin(\ln x) - J.$$

Ahora con J, $u = \cos(\ln x)$, $v' = 1$:

$$J = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + I \quad (*)$$

Reemplazando en la ec. anterior

$$I = x\sin(\ln x) - J = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - I$$

$$\Leftrightarrow \quad 2I = x\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad I = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + cte \;/\!/$$

Reemplazando en (*)

$$J = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right) + cte. \;/\!/$$

④ Integrando por partes $u = e^x$, $v' = \cos x$

$$I = \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx.$$

Por partes la integral restante $u = e^x$, $v' = \sin x$

$$\int e^x \sin x = -e^x\cos x + \underbrace{\int e^x \cos x\,dx}_{I}$$

luego

$$I = e^x \sin x - (-e^x \cos x + I)$$

$$\Leftrightarrow \quad I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + cte. \;/\!/$$

⑤ Integramos por partes $v' = \sec^2 x$ luego $v = \tan x$, y $u = \sec x$, $u' = \sec x \tan x$:

$$I = \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx \dashrightarrow = 1 - \cos^2 x$$

$$= \sec x \tan x - \underbrace{\int \frac{dx}{\cos^3 x}}_{I} + \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$= \sec x \tan x - I + \int \sec x \, dx \dashrightarrow ① \text{ conocida}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}(\sec x + \tan x) + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + \text{cte} \quad //$$

P2| Usamos $S(f,P)$ cuando $|P| \to 0$ para calcular la integral, con P partición equiespaciada. Luego con $2n$ intervalos

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{2n} M_i \overbrace{\Delta X_i}^{1/n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} M_i$$

Recordar que $M_i = \sup\limits_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} f(x) = \sup\limits_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} \lfloor x \rfloor - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$

Luego para $i < n$ tenemos que $M_i = 0$ $(\lfloor x \rfloor = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor = 0)$

Para $n \leq i < 2n$, $\lfloor x \rfloor = 1$ y $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = 0$ luego $M_i = 1$. En el caso $i = 2n$ también $M_i = 1$.

Entonces la suma es:

$$S(f,P) = \frac{1}{n} \sum_{i=n}^{2n} 1 = \frac{n+1}{n} \to 1$$

Tomando $n \to \infty$ $(|P| \to 0)$ obtenemos

$$\Rightarrow \int_0^2 \lfloor x \rfloor - 2\lfloor \tfrac{x}{2} \rfloor \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

(Para demostrar la igualdad anterior debemos demostrar lo mismo con $s(f,P)$, lo que hicimos fue mostrar que si existe la integral debe valer 1).

P3| f^2 debe estar definida pues $f^2(x) = (f(x))^2$ definida en $x \in [a,b]$. Además está acotada pues

$$0 \leq f^2(x) \leq \sup_{x\in[a,b]} \{f(x)^2\} \underset{\uparrow}{=} \sup_{x\in[a,b]} \{f(x)\}^2 = M^2,$$

donde $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. La penúltima igualdad es cierta ya que $f(x) \geq 0$. Ahora mostraremos que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P$ partición de $[a,b]$ tq

$$S(f^2,P) - s(f^2,P) < \varepsilon$$

Sabemos que $\forall \varepsilon' > 0$ $\exists P$ tq $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon'$ (f integrable). Entonces vemos

$$S(f^2,P) - s(f^2,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i^2 - m_i^2)\Delta x_i,$$

con $\begin{cases} M_i^2 = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)^2\} = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \{f(x)\}^2 \\ m_i^2 = \inf\{f(x)^2\} = \inf\{f(x)\}^2 \end{cases}$ ya que $f(x) \geq 0$.

Entonces

$$S(f^2,P) - s(f^2,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(M_i + m_i) \Delta x_i$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) 2M \Delta x_i$$
$$= (S(f,P) - s(f,P)) 2M \Delta x_i < 2M\varepsilon'$$

Tomando $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$ concluimos. //

P4| (a) Razonemos por contradicción. Asumamos que existe un x_0 donde $f(x_0) \neq 0$, con $x_0 \in [a,b]$. Por continuidad de $|f(x)|$ debe existir $n \in \mathbb{N}$ tq si $x \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \Rightarrow |f(x)| \neq 0$

(Haciendo que $||f(x)| - |f(x_0)|| < |f(x_0)|$).

Ahora ya que $\int_a^b |f(x)| = 0$ también debemos tener que con una partición equiespaciada de nN intervalos

$$S(|f|,P) = \sum_{i=1}^{nN} M_i \Delta x_i = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{} M_i \to 0$$

cuando $N \to \infty$

Ya que $|f(x)| \geq 0 \Rightarrow M_i \geq 0$, $\forall i$. Entonces

$$S(|f|,P) = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{nN} M_i \geq \frac{1}{nN} \sum_{i=k-N}^{k+N} M_i$$ donde k

es el intervalo donde esta x_0. Como $M_i > 0$

para $i = k-N, \ldots, k+N$ ⇒ si m es el mínimo de estos valores $m > 0$.

$$\Rightarrow S(|f|, P) \geqslant \frac{1}{nN} \sum_{i=k-N}^{k+N} M_i \geqslant \frac{1}{nN} \sum_{i=k-N}^{k+N} m$$

$$\Rightarrow S(|f|, P) \geqslant \frac{2N+1}{nN} m > \frac{2m}{n}, \ \forall N \geqslant 1$$

luego $S(|f|, P) \neq 0$ cuando $N \to \infty$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$ //

(b) Tomamos $g(x) = f(x)$ y notamos que $f(x)^2 = |f^2(x)|$ (y que f^2 es continua). Por la parte (a) ⇒ $f^2(x) = 0$, ya que

$$\int f(x) g(x)\, dx = \int f(x)^2 dx = \int |f^2(x)|\, dx = 0.$$

Claramente $f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. (¿por que?)