

Auxiliar 7 - Teorema Fundamental del Cálculo

Profesor: Raúl Uribe

Auxiliar: Javier Gómez

Intuitivamente el TFC permite reemplazar sumatorias y límites por primitivas.

- Si f es Riemann integrable en $[a, b]$, la función $F = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$.
- **(1er TFC)** Si f es continua en $[a, b]$ entonces F es derivable y $F'(x) = f(x)$.
- **(2do TFC)** Si f es integrable en $[a, b]$ y si existe una función g tal que $g'(x) = f(x)$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(a) - g(b).$$

P1. Utilizando sumas de Riemann, exprese $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{2k\pi}{n}$ como integrales.

P2. Demuestre que $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)}$. Luego calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

P3. Calcular las siguientes integrales (**CV**: Cambio Var., **IP**: Int. por Partes)

$$\text{IP} \int_1^e x^2 \ln x dx \quad \text{CV} \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}^3} dx \quad \text{IP} \int_0^1 (-\ln x)^{k-1} dx$$

P4. Demuestre que $F(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ es constante y determine su valor. Para esto escriba los términos como integrales.

P5. Sea f continua en $[a, b]$. Muestre que existe $\xi \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$. Este resultado se conoce como TVM para Integrales.