Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002/2 - Cálculo Diferencial e Integral

Auxiliar 6 - Sumas e Integrales de Riemann

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Javier Gómez

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, para definir integrabilidad definamos primero:

- Una **partición** del intervalo $[a, b]$ es un conjunto $P = x_0, .., x_n$ con $a = x_0 < ... < x_n = b$. Además $|P| = \max\{x_i - x_{i-1} : i \in \{1, ..., n\}\}$.
- Para esta definimos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $m_i = \inf f(x)$, $M_i = \sup f(x)$ ambos con $x \in [x_{i-1}, x_i]$.
- La **suma superior** es $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ y la **suma inferior** es $s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.
- Ahora definimos variando P en el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ la **integral superior** $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf S(f, P)$ y la **integral inferior** $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup s(f, P)$.
- Finalmente f es **Riemann integrable** si ambas integrales son iguales. Lo mismo es la **condición de Riemann**: si f es definida y acotada en $[a, b]$ es integrable ssi para todo $\varepsilon > 0$ existe P partición de $[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Esto se cumple si f es continua.

P1. Calcular las siguientes primitivas (**FP:** Frac. Parciales, **IP:** Int. por Partes)

$$\textbf{FP} \int \sec x \mathrm{d}x \quad \textbf{IP} \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x \quad \textbf{IP} \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x \quad \textbf{IP} \int e^x \cos x \mathrm{d}x \quad \textbf{IP} \int \sec^3 x \mathrm{d}x$$

P2. Usando una patición equiespaciada calcular $\displaystyle\int_0^2 \lfloor x \rfloor - 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \mathrm{d}x$.

P3. Sea f definida y acotada en $[a, b]$, Riemann integrable tal que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$. Pruebe que f^2 es Riemann integrable en $[a, b]$.

P4. (a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = 0$, entonces $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$.

(b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$ para toda función g continua sobre $[a, b]$. Demuestre que $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$.

P5. Utilizando sumas de Riemann, exprese $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin \frac{2k\pi}{n}$ como integrales.