

Aux Extra - Trabajo Dirigido C1

P11 (a) Vemos que

$$f(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y}{1} = 1.$$

L'Hopital

Para $x \neq 0$ es fácil ver que

$$f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + \sin x - 1}{x + y} = \frac{\sin x}{x}.$$

Entonces una def. equivalente de f es

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

que sabemos es continua (ejercicio simple).

(b) P1, C1 del 2011-1.

P21 (a) Si $f(0) = g(0)$ terminamos de inmediato, luego asumimos sin pérdida de generalidad que $f(0) > g(0)$ (si no las intercambiamos). Por otro lado como g es epiyectiva tendremos que existe un $\xi \in [0, 1]$ donde $g(\xi) = 1$. Esto implica que

$$g(\xi) > f(\xi) \quad (\text{pues } f: [0, 1] \rightarrow [0, 1])$$

pues si $g(\xi) = f(\xi)$ terminamos. Entonces

si definimos $h(x) = f(x) - g(x)$ vemos que

$$h(0) > 0 \quad y \quad h(\xi) < 0$$

Wego por TVI existe $c \in [0, 1]$ tq

$$h(c) = f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c) //$$

(b)(i) Como f , $\sin x$ y $\cos x$ son $C^2 \Rightarrow F$ es C^2 .
Por otro lado:

$$\rightarrow F'(x) = f'(x) + f(0)\sin x - f'(0)\cos x,$$

$$\rightarrow F''(x) = f''(x) + f(0)\cos x + f'(0)\sin x,$$

$$\Rightarrow F''(x) + F(x) = f''(x) + f(x) = 0$$

(otros terminos se cancelan)

(ii) Puede ser tentador reemplazar directamente $F'(x)$ y $F(x)$ pero esto es engorroso y al final usaremos $f'' + f = 0$ (...pero la idea es ocupar $F'' + F = 0$!)

Notemos que $H(x) = F'^2(x) + F^2(x)$ entonces

$$H'(x) = 2F'(x)F''(x) + 2F(x)F'(x)$$

$$= 2F'(x) \underbrace{(F''(x) + F(x))}_0 = 0,$$

Wego $H(x) = F'^2(x) + F^2(x) = K = \text{cte}$. Al notar que $F(0) = F'(0) = 0$ tenemos $K = 0$. Pero

$$F'^2(x) + F^2(x) = 0 \Rightarrow F'(x) = F(x) = 0.$$

Como $F(x) = f(x) - f(0)\cos x - f'(0)\sin x$ terminamos.

P3 (a) Usamos TVM con $\arctan x$ en $(0, x)$,
wego existe $c \in (0, x)$ tq

$$\frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1+c^2} \quad \left(\text{pues } \arctan' = \frac{1}{1+x^2} \right)$$

Entonces como $1+c^2 \geq 1$

$$\arctan x \geq x //$$

La integral se hace por partes (se me pasó ese detalle al ponerla). Veremos la solución la próx. clase.

(b) 1. Haciendo el cambio $(x+3)^{1/6} = u$
tenemos

$$du = \frac{1}{6}(x+3)^{-5/6} dx = \frac{u}{6} dx \Rightarrow \int \frac{(x+3)^{1/2}}{(x+3)^{1/3}+1} dx = \int \frac{u^3 dx}{u^2+1}$$

se hace con exponente
1/6 pues mínimo común
múltiplo de 2 y 3 es 6

$$= 6 \int \frac{u^8}{u^2+1} du$$

Esta integral queda propuesta les debe dar

$$6 \int \frac{u^8}{u^2+1} = \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3 - u + \arctan u + C$$

Por partes ~~puede salir~~ fácil pero la idea es escribir factores (u^2+1) así

$$\frac{u^8}{u^2+1} = \frac{u^8 + u^6 - u^6 - u^4 + u^4 + u^2 - u^2 - 1 + 1}{u^2+1}$$

$$= u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1} //$$

2. Escriba

$$\int \frac{dx}{a^2 e^x + b^2 e^{-x}} = \frac{1}{ab} \int \frac{dx}{\left(\frac{a}{b}e^x\right) + \left(\frac{b}{a}e^{-x}\right)} = \frac{1}{ab} \int \frac{dx}{u + u^{-1}}$$

con $u = \frac{a}{b}e^x$, como $du = \frac{a}{b}e^x dx = u dx$
esto es

$$= \frac{1}{ab} \int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{ab} \arctan u = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b}e^x\right) + C //$$

3. Ponemos $e^{x^3} = u \Rightarrow du = 3e^{x^3} x^2 dx = 3u x^2 dx$
luego

$$\int \frac{x^2}{e^{x^3}} dx = \int \frac{du}{3u^2} = -\frac{1}{3u} + C = -\frac{1}{3e^{x^3}} + C //$$

P41 P2, C1 del 2010-3 (Verano). //