

Auxiliar Extra - Trabajo Dirigido C1

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Javier Gómez

Indicaciones: Se puede preguntar cualquier fórmula de la materia y hacer consultas en cualquier momento. Cada problema es equivalente a una pregunta de Control y su tiempo de resolución estimado es 1 hora. Se sugiere resolver dos completos durante esta clase, priorizando aquellos donde podrían tener más dudas. El resto queda propuesto (habrá pauta). ¡Mucho éxito en lo que se viene!

P1. (a) Considere la función $f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + \sin x - 1}{x + y}$. Determine $f(0)$ y $f(x)$ para $x \neq 0$ y analice la continuidad de f en \mathbb{R} .

(b) Estudie la continuidad uniforme en $(0, 1)$ de: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$.

P2. (a) Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas y epiyectivas. Demostrar que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = g(c)$.

(b) a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función dos veces derivable en todo \mathbb{R} y tal que $f''(x) + f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

i. Considere la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = f(x) - f(0) \cos x - f'(0) \sin x$. Demuestre que F es dos veces derivable y que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F''(x) + F(x) = 0.$$

ii. Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) + F(x) = k \in \mathbb{R}$, constante. Determine el valor de la constante k . Concluya que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) \cos x + f'(0) \sin x$.

P3. (a) Usando el TVM (para derivadas) pruebe que $\arctan x \leq x$, $\forall x \in [0, \infty)$. Calcule la integral indefinida $\int (x - \arctan x) dx$.

(b) Calcule: 1. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+1} dx$ 2. $\int \frac{dx}{a^2 e^x + b^2 e^{-x}}$ 3. $\int \frac{x^2}{e^{x^3}} dx$ 4. $\int x \arctan x dx$

P4. Sea $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = e^{\frac{1}{\ln|x|}}$.

(a) Determine si f tiene ceros en su dominio.

(b) Determine el/los signo/s de f .

(c) Determine asíntotas horizontales y verticales de f .

(d) Determine la monotonía de f en su dominio.

(e) Determine las rectas tangentes a f en cualquier punto $(x, f(x))$.

(f) Estudie la concavidad/convexidad de f en todo su dominio.

(g) Haga un bosquejo de f .