

P1 Reemplazamos $f(x)$

$$\begin{aligned}\int f(x) e^{h(x)} dx &= \int (g'(x) + h'(x)g(x)) e^{h(x)} dx \\ &= \int (g'(x) e^{h(x)} + g(x) e^{h(x)} h'(x)) dx \\ &= \int (g(x) e^{h(x)})' dx = g(x) e^{h(x)} + C\end{aligned}$$

También podemos derivar el lado derecho y encontrar $f(x) e^{h(x)}$ para probarlo.

P2 Primero reemplazemos $u = \arcsin x$, que es $x = \sin(u) \Rightarrow dx = \cos(u) du$. Nótese que $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ por definición luego $\cos(u) \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos(u)}{\sqrt{1-\sin^2 u}} du = \int \frac{\cos u}{\cos u} du \\ \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int du = u + C = \arcsin x + C\end{aligned}$$

Asimismo si reemplazamos $u = \arccos x$ vemos que como $u \in [0, \pi] \Rightarrow \sin(u) \geq 0$. Luego igualmente ($dx = -\sin(u) du$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\sin u}{\sin u} du = -\arccos x + C$$

Entonces como $\arcsin x$ y $-\arccos x$ son primitivas de $(1-x^2)^{-1/2}$ difieren por una constante

$$\Rightarrow \arcsin x + \arccos x = c$$

Poniendo $x = 0$ vemos $c = \arccos 0 = \pi/2$,
($\forall x \in [-1, 1]$).

P31 Sea $I_1 = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ e $I_2 = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

Entonces vemos que

$$I_1 + I_2 = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + C_1$$

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx \quad \begin{array}{l} u = \sin x + \cos x \\ du = (\sin x + \cos x)' dx \end{array} \\ &= \int \frac{1}{u} du = \ln u + C_2 = \ln(\sin x + \cos x) + C_2 \end{aligned}$$

Ahora por algebra de integrales podemos despejar I_1 e I_2 (las constantes las ignoramos pues solo forman otra constante)

$$I_1 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{2}(I_1 - I_2) = x + \ln(\sin x + \cos x) + C$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) - \frac{1}{2}(I_1 - I_2) = x - \ln(\sin x + \cos x) + C //$$

P4) En la primera cambiamos $u = \sqrt{1+\sin x}$,
luego

$$du = \frac{\cos x \, dx}{2\sqrt{1+\sin x}} \Rightarrow \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\sin x}} \, dx = \int \sin x \, du,$$

pero $u^2 - 1 = \sin x$ entonces la integral es

$$\begin{aligned} 2 \int (u^2 - 1) \, du &= \frac{2}{3} u^3 - 2u + C \\ &= \frac{2}{3} (1 + \sin x)^{3/2} - 2(1 + \sin x)^{1/2} + C \end{aligned}$$

Para la segunda hacemos $u = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, luego

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{4\sqrt{x} \sqrt{1+\sqrt{x}}} \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \, dx = \int \frac{4x \, dx}{4\sqrt{x} \sqrt{1+\sqrt{x}}} \\ &= \int 4x \, du, \end{aligned}$$

pero $x = (u^2 - 1)^2$ luego la integral es

$$4 \int (u^2 - 1)^2 \, du = 4 \left(\frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} + u \right) + C$$

-----> reemplazando $u = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

$$= \frac{4}{15} \sqrt{1+\sqrt{x}} (3x - 4\sqrt{x} + 8) + C$$

PS1 El cambio $t = \tan x/2$ permite escribir

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

usando las identidades trigonométricas de ángulo doble. Además

$$dt = \frac{1}{2} \sec^2 x/2 dx = \frac{1 + \tan^2 x/2}{2} dx = \frac{1+t^2}{2} dx$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{2 dt}{(1+t^2) \left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int t^{-2} dt$$

$$= \int t^{-2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\tan x/2} + C$$

La otra integral es

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{2 dt}{(1+t^2) \left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right)}$$

$$= \int \frac{2 dt}{(2t + 1 - t^2 + 1 + t^2)} = \int \frac{dt}{t+1}$$

$$= \ln(t+1) + C = \ln(\tan x/2 + 1) + C //$$

P6 | Solo haremos la primera (las otras tres las veremos en clases). Si hacemos el cambio $u = \sqrt{a^2 + x^2}$ tenemos

$$du = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \Rightarrow \quad \int \underbrace{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}_{x \sqrt{a^2 + x^2}} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \int u^2 du$$

$$= \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} (a^2 + x^2)^{3/2} + C //$$