

Auxiliar 5 - Primitivas y Preparación C1

Profesor: Raúl Uribe

Auxiliar: Javier Gómez

Sean I un intervalo y $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones:

- Una función $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, continua en I y diferenciable en $\text{Int}(I)$, se dice **primitiva** de f si $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \text{Int}(I)$.
- Si F y G son dos primitivas de una misma función f entonces difieren por una constante. Luego la **integral indefinida** $\int f(x)dx = F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$, denota cualquier primitiva de f .
- **Propiedades:** Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple $\int (f(x) + \lambda g(x))dx = \int f(x)dx + \lambda \int g(x)dx$. Además $(\int f(x)dx)' = f(x)$ y $\int f'(x)dx = f(x) + c$.
- **Cambio de Variable:** Consideremos $u = g(x)$, entonces $\int (f \circ g)(x)g'(x)dx = \int f(u)du$.
- **Integración por Partes:** Se tiene que $\int f(x)g'(x)dx = u f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

P1. Sean f , g y h funciones que cumplen $f(x) = g'(x) + h'(x)g(x)$. Pruebe que

$$\int f(x)e^{h(x)}dx = g(x)e^{h(x)} + c.$$

P2. Estudiando las primitivas $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, probar que $\forall x \in [-1, 1]$ se tiene $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

P3. Calcular las integrales $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$ y $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$.

P4. Utilizando el método de cambio de variables resuelva $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}dx$ y $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}dx$.

P5. Usando el cambio de variables $t = \tan \frac{x}{2}$, calcular $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$ y $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.

P6. Calcular las siguientes integrales (**CV:** Cambio Var., **FP:** Frac. Parciales, **IP:** Int. por Partes):

$$\text{CV} \int x\sqrt{a^2 + x^2}dx \quad \text{IP} \int x^2 e^x dx \quad \text{IP} \int \cos(\ln x)dx \quad \text{FP} \int \frac{dx}{x(\ln x + \ln^2 x)}$$