

Auxiliar 4 - Derivadas y Preparación C1

Profesor: Raúl Uribe

Auxiliar: Javier Gómez

- **Aplicaciones de las derivadas:** Monotonía ($f \nearrow$ si $f' > 0$), concavidad (f cóncava positiva si $f'' > 0$), análisis de puntos de críticos (máximos/mínimos locales), L'Hopital para límites indefinidos, expansiones de Taylor.
- **TVM Generalizado:** Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en (a, b) con $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

P1. Encuentre las dimensiones del cono de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R (el contorno de la base y la punta del cono tocan la superficie de la esfera).

P2. Sea f continua en $[0, \infty)$, derivable en $A = (0, \infty)$ y tal que $f(0) = 0$. Dado que $f'(x)$ es creciente en A , utilice el TVM para probar que $\forall x \in A$, $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$. Concluya que la función $\frac{f(x)}{x}$ es creciente en A .

P3. Sea una función de clase $\mathcal{C}^n$ definida en un intervalo I con $x_0 \in I$ que satisface:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dado que $g(x) = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$, expanda en Taylor para definir $g(x)$ en x_0 de forma que sea continua y calcule $g'(x_0)$.

P4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con $f(0) = f'(0) = 0$. Para $a > 0$ se define $g(x) = f(x) - \left(\frac{x}{a}\right)^2 f(a)$. Demuestre que $\exists \xi \in (0, a)$ tal que $a^2 f''(\xi) = 2f(a)$.

P5. Considere la función $f(x) = 1 + xe^x$, se pide:

- Dominio, continuidad y estudiar si es que existen puntos de continuidad reparable.
- Asíntotas, si las hay.
- Estudiar crecimiento, máximos y mínimos.
- Demostrar que f tiene un unico cero en $[-2, -1]$.
- Estudiar la convexidad y puntos de inflexión (si los hay) de f .
- Hacer un bosquejo del gráfico de f .