Auxiliar 3 - Derivadas y Aplicaciones

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Javier Gómez

- **Algebra de Derivadas:** Si f, g son derivables en x_0 existen $(f+\alpha g)' = f' + \alpha g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, y si $g(x_0) \neq 0$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- **Derivada de la Inversa:** Si f es biyectiva y diferenciable en x_0 entonces f^{-1} es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$. Además $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.
- **Regla de la Cadena:** Sean f y g dos funciones diferenciables en x_0 y $f(x_0)$ respectivamente, entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.
- **Regla de Fermat:** Si $x_0 \in (a, b)$ es un **mínimo o máximo local** de una función derivable $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(x_0) = 0$.
- **Otras aplicaciones de las derivadas:** Monotonía ($f \nearrow$ si $f' > 0$), concavidad (f cóncava positiva si $f'' > 0$), análisis de puntos de críticos (máximos/mínimos locales).

P1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables en $a \in \mathbb{R}$ con $f(a) = g(a)$ y $f'(a) = g'(a)$. Probar que toda función h tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ es derivable en a con $h'(a) = f'(a) = g'(a)$.

P2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y positiva $\forall x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)} \right)^{1/\delta}$ existe, es positivo y dé su valor.

P3. Encuentre f' para la función $f(x) = \arcsin(2x-1) + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, definida en $(0, 1]$.

P4. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función derivable en su dominio que satisface $xf'(x) = -f(x)$ en el mismo. Probar que f es de la forma $f(x) = \frac{c}{x}$, con $c \in \mathbb{R}$.

P5. Considere la función $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$ definida en $(-1, 1) - \{0\}$. Cálcule $\lim f(x)$ cuando $x \to -1^+$ y $x \to 1^-$. Repare continuidad y calcule la derivada de f. Concluya que decrece.

P6. Sea A un punto en el eje y, B un punto distinto cualquiera. Encontrar el punto P en el eje x tal que $L = \overline{AP} + \overline{PB}$ es mínimo.

P7. Encuentre las dimensiones del cono de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R (el contorno de la base y la punta del cono tocan la superficie de la esfera).