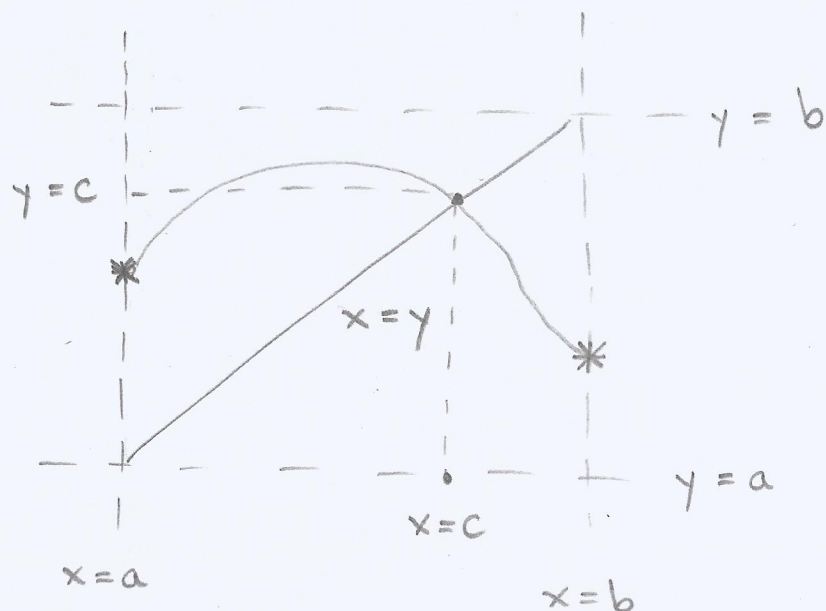


Aux 2

P1) Ver auxiliar 1.

P2)



La idea es que si f es continua y va desde algun punto en el lado derecho del cuadrado al lado izquierdo entonces interseca la recta $x=y$.

En efecto, asumimos que $f(a) \neq a$ y $f(b) \neq b$ pues sino ya tenemos algún pto. fijo. Entonces $f(a) > a$ y $f(b) < b$ (por dominio de f). Definimos $g(x) = f(x) - x$, luego $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$.

Por TVI $\exists x_0 \in [a, b]$ tq $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$.
Concluimos $f(x_0) = x_0$.

P3) Como $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua aplicamos TMM, entonces $\exists \underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x})$ $\forall x \in [a, b]$. En particular $\forall x_i, i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow f(\underline{x}) \leq f(x_i) \leq f(\bar{x})$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i f(\underline{x}) \leq \sum_{i=1}^N \alpha_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^N \alpha_i f(\bar{x})$$

Si definimos $g(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f(x) - \sum_{i=1}^N \alpha_i f(x_i)$
lo anterior es

$$g(\underline{x}) \leq 0 \leq g(\bar{x})$$

Si alguno $\underline{x}$ o $\bar{x}$ cumplen la igualdad terminamos
($\underline{x} = c$ o $\bar{x} = c$). Si no, por TVI:

$$\exists c \in [\min(\bar{x}, \underline{x}), \max(\bar{x}, \underline{x})] : g(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f(c)$$

(¿Qué pasa si $\bar{x} = \underline{x}$?)

P4 Veamos que $\forall x \in \mathbb{R} - I : f(x) > f(0)$. En efecto
si $x \notin [-f(0), f(0)] = I$ entonces $|x| > f(0)$. Luego.

$$\forall x \in \mathbb{R} - I : f(x) \geq |x| > f(0).$$

Ahora mostraremos que existe un mínimo global.

Definamos $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ que es f restringida
a I . Por TMin $\exists \underline{x} \in I$ tal que $\tilde{f}(\underline{x}) \leq \tilde{f}(x)$

para todo $x \in I$, Entonces $(\underline{x}, f(\underline{x}))$ es
mínimo global pues si $x \in I$ tenemos

$$f(\underline{x}) = \tilde{f}(\underline{x}) \leq \tilde{f}(x) = f(x),$$

y si $x \in \mathbb{R} - I$ (el resto) tenemos

$$\tilde{f}(\underline{x}) = \tilde{f}(\underline{x}) \leq f(0) < f(x),$$

o sea $\forall x \in \mathbb{R}, f(\underline{x}) \leq f(x)$. ($\underline{x}$ mín. global)

PS Vemos que si definimos $h(x) = f(x) - g(x)$
también derivable en (a, b) con $h'(x) = 0$, lo
que queremos mostrar es $h(x) = f(x) - g(x) = c$
constante. Podemos aplicar TVM para cualquiera
 $x, y \in [a, b]$ (formalmente define $\tilde{h}: [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$),
con $x < y$. Entonces $\exists c \in [x, y]$ tal que

$$h'(c) = 0 = \frac{h(y) - h(x)}{y - x}$$

$$\Rightarrow h(x) = h(y), \quad \forall x, y \in [a, b]$$

$$\Rightarrow h(x) = cte.$$

P6 | Notemos que con $f(x) = \alpha x - x^\alpha$ la desigualdad que queremos demostrar es

$$f(x) = \alpha x - x^\alpha \geq \alpha - 1 = f(1)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0.$$

Ahora notemos que como f es derivable en $(0, 1)$ y $(1, \infty)$, podemos aplicar TVM como sigue.

$$\text{Si } x < 1, \exists \xi \in (x, 1) : \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(\xi) = \alpha(1 - \xi^{\alpha-1}),$$

$$\Rightarrow f(x) - f(1) = \alpha(1 - x)(\xi^{\alpha-1} - 1) > 0$$

pues $\alpha > 0$, $1 - x > 0$, $\xi^{\alpha-1} > 1$ (ya que $0 < \xi < 1$ y $\alpha - 1 < 0$).

Ahora si $x > 1$, $\exists \xi' \in (1, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi') = \alpha(1 - \xi'^{\alpha-1}) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(1) = \alpha(x - 1)(1 - \xi'^{\alpha-1}) > 0.$$

Luego concluimos $x^\alpha \leq \alpha x + (1 - \alpha)$. Para lo siguiente definir $x = \frac{a}{b}$. La igualdad se logra solo con $x = \frac{a}{b} = 1$. //

P7 | Calculemos la derivada de $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ primera. Esto es

$$\begin{aligned} (\arctan(y))' &= \frac{1}{(\tan(x))'} \quad (\text{con } \tan(x) = y) \\ &= \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2} \end{aligned}$$

Entonces $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ahora calculemos

$$\left(\arctan \frac{x+C}{1-Cx} \right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+C}{1-Cx} \right)^2} \cdot \left(\frac{x+C}{1-Cx} \right)'$$

$$\text{como } \left(\frac{x+C}{1-Cx} \right)' = \frac{(1-Cx) + C(x+C)}{(1-Cx)^2} = \frac{1+C^2}{(1-Cx)^2}$$

entonces

$$\left(\arctan \frac{x+C}{1-Cx} \right)' = \frac{1+C^2}{(1-Cx)^2 + (x+C)^2} = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x$$

Entonces por PS:

$\arctan C$ (poner $x=0$)

$$\arctan \left(\frac{x+C}{1-Cx} \right) = \arctan x + \text{cte}$$