Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002/2 - Cálculo Diferencial e Integral

Auxiliar 2 - Continuidad, Derivadas

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Javier Gómez

- Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **uniformemente continua** en A si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A$, con $|x - y| < \delta)$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- **Teorema del Valor Intermedio (TVI):** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces para todo valor $c \in \mathbb{R}$ comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = c$.
- **Teorema de máximos y mínimos (TMm):** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces existen $x_{\max}, x_{\min} \in [a, b]$ tal que $\forall x \in [a, b]$, $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$.
- **Teorema del Valor Medio (TVM):** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable en (a, b). Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

P1. Si $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Pruebe que $f(x)$ es uniformemente continua en $[a, \infty)$.

P2. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función continua. Demuestre que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que x_0 es punto fijo de f, o sea $f(x_0) = x_0$.

P3. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, $\{x_i\}_{i=1}^N \subseteq [a, b]$ y $\{\alpha_i\}_{i=1}^N \subseteq \mathbb{R}^+$. Muestre que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(c).$$

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(x) \geq |x|$. Si $I = [-f(0), f(0)]$, demuestre que $(\forall x \in \mathbb{R} - I)$ se tiene $f(x) > f(0)$. ¿Tiene f mínimo global en $\mathbb{R}$?

P5. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivables en (a, b) tales que $f'(x) = g'(x)$. Demuestre que $f(x) = g(x) + c$

P6. Demuestre que si $\alpha \in (0, 1)$, entonces $x^\alpha \leq \alpha x + (1 - \alpha)$ para todo x no negativo. Deduzca que si $a, b \in (0, \infty)$, entonces $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + b(1 - \alpha)$. Para esto considere la función $f(x) = \alpha x - x^\alpha$.

P7. Si $c \in \mathbb{R}$ calcule la derivada de $f(x) = \arctan \dfrac{x + c}{1 - cx}$. Deduzca que $f(x) = \arctan x + \arctan c$.