

Aux 1

P11 Recordemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{f(n)} = l$

para toda subsucesión $(x_{f(n)})$. Ahora si

$$X_{2u} \rightarrow X_1$$

$$x_{2u+1} \rightarrow x_2$$

$$X_{3u} \rightarrow X_3$$

veamos que $x_1 = x_2 = x_3$. En efecto:

$$x_{6n} \rightarrow x_1 \text{ (subsuc. de } x_{2n}) \text{ (unicidad del lim)}$$

$$x_{6u} \rightarrow x_3 \text{ (subsuc. de } x_{3u}) \Rightarrow x_1 = x_3$$

Asimismo $x_{6u+3} \rightarrow x_2$ (subsuc. de x_{2u+1})

$$X_{6u+3} \rightarrow X_3 \quad (" \text{ de } X_{3u}) \quad \Rightarrow \quad X_2 = X_3$$

Tenemos entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = x_1$, o sea:

$$\exists \epsilon > 0 \quad (\exists m \in \mathbb{N}) \quad (\forall n \geq m) \quad (|x_{2n} - x_1| < \epsilon)$$

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_2 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_2) |x_{2n+1} - x_1| < \varepsilon$$

Wego para cualquier $\epsilon > 0$, $\exists u_0 = \max(zu_1, zu_{z+1})$
tal que

$$|x_n - x_1| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_1$$

P2] Ver que: $\forall$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_1 \in \mathbb{N})(\forall u \geq m_1): |\mu_{2u} - l| < \varepsilon$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_2 \in \mathbb{N})(\forall u \geq m_2): |\mu_{2u+1} - \mu_{2u}| < \varepsilon$$

Por desigualdad triangular $\forall \varepsilon' = 2\varepsilon > 0$, existe $u_0 = \max(m_1, m_2)$ tal que $\forall u \geq u_0$

$$|\mu_{2u+1} - l| \leq |\mu_{2u} - l| + |\mu_{2u+1} - \mu_{2u}| < \varepsilon'$$

$$\Rightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \mu_{2u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \mu_{2u+1} = l. \text{ Concluimos}$$

$$\text{igual que en P1} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \mu_u = l. //$$

P3] Como $(a_n) \in [a, b] \Rightarrow (a_n)$ es acotada. Por B-W
 $\Rightarrow \exists (a_{n_k})$ subsuc. convergente con $a_{n_k} \rightarrow x_0$.

Veamos que $x_0 \in [a, b]$. Si no, $x < a$ o $x > b$.

$$\underline{x < a}: \Rightarrow (\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0) a_{n_k} \in \left(x_0 - \frac{|x_0 - a|}{2}, x_0 + \frac{|x_0 - a|}{2}\right) \\ \text{disjunto de } [a, b] \Rightarrow \Leftarrow.$$

$$\underline{x > b}: \Rightarrow \text{lo mismo} \Rightarrow \Leftarrow.$$

Ahora como $f(a_{n_k})$ es una subsecuencia de $f(a_n)$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) = l$$

y como $a_{n_k} \rightarrow x_0$ por f continua $f(a_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$.
Por unicidad del límite $f(x_0) = l$, $x_0 \in [a, b]$. //

P4 Queremos demostrar que $(|x-0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(0)| < \varepsilon)$
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) : |x| < \delta \Rightarrow |x \sin \frac{1}{x}| < \varepsilon$

Entonces asumamos $|x| < \delta$. Como $\sin \frac{1}{x}$ es función acotada en $[-1, 1]$ tenemos $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$. Luego:

$$|x| \cdot |\sin \frac{1}{x}| = |x \cdot \sin \frac{1}{x}| < \delta \cdot 1 = \delta$$

Vemos que basta tomar $\delta = \varepsilon$ para concluir.

P5 Estrategia general:

- (1) Probar $f(0) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$)
- (2) Probar $f(ux) = f(x) \cdot u$ ($u \in \mathbb{N}$)
- (3) Probar $f(-x) = -f(x)$
- (4) Probar $f(\frac{1}{u}) = \frac{1}{u} f(1)$
- (5) Para $q, p \in \mathbb{Z}$
$$f(\frac{q}{p}) = \frac{q}{p} f(1)$$
- (6) Por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y continuidad concluir.

$$(1) \underbrace{f(0)}_{0+0} = f(0) + f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

(2) Aplicar n veces

$$\begin{aligned} f(\underbrace{x + \dots + x}_n) &= f(\underbrace{x + x + \dots + x}_{n-1}) + f(x) \\ &= f(\underbrace{x + x + \dots + x}_{n-2}) + f(x) + f(x) \\ &\dots \\ &= n \cdot f(x). \quad // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) f(x + (-x)) &= f(0) = 0 = f(x) + f(-x) \\ &\Rightarrow -f(x) = f(-x). \end{aligned}$$

$$(4) f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = n f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(1)$$

(5) luego si $p, q \in \mathbb{Z}$ (si son negativos usamos (3))

$$\underbrace{f\left(\frac{q}{p}\right)}_{\text{por (2)}} = q \underbrace{f\left(\frac{1}{p}\right)}_{\text{por (4)}} = \frac{q}{p} f(1)$$

(6) Por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ tenemos que para todo $y \in \mathbb{R}$, $\exists (x_n) \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $x_n \rightarrow y$. Usamos la continuidad de f . ($a = f(1)$)

$$\underbrace{f(x_n)}_{\text{por (5)}} = x_n f(1) \rightarrow f(y) = y \cdot f(1) \Rightarrow f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

P61 Queremos mostrar que $\forall x \in (0, \infty)$ f es continua en x . Consideremos entonces una sucesión (x_n) que converge a x y mostramos que $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

$$\text{Notemos que } f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \\ \Rightarrow f(1) = 0.$$

$$\text{y luego } f\left(\frac{x}{x}\right) = f(1) = 0 = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \\ \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

Ahora notamos que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ es $f(x_n) - f(x) \rightarrow 0$ y:

$$f(x_n) - f(x) = f(x_n) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{x_n}{x}\right),$$

como $\frac{x_n}{x} \rightarrow 1$ y f es continua en 1.

concluimos

$$f(x_n) - f(x) = f\left(\frac{x_n}{x}\right) \rightarrow f(1) = 0 //$$

P7 Es suficiente hacer lo siguiente. Para $\varepsilon > 0$ tomamos N tal que para $x > N$

$$|f(x) - k| < \varepsilon/2$$

wego si $x, y > N$ por la desigualdad triangular

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - k| + |f(y) - k| < \varepsilon$$

Ahora consideramos $[a, N+1]$. Como es compacto f es unif. continua acá (sigue de la continuidad),

wego $\exists \delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Podemos asumir sin problemas $\delta < 1$. Ahora para

$x, y \geq a$ a menor distancia que δ , podemos

ver que si $x, y \leq N+1$ terminamos, y si

alguno $x > N+1 \Rightarrow y > N$ (por la elección de δ),

y concluimos //