Auxiliar 1 - Continuidad

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Javier Gómez

- Sea (x_n) una sucesión y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ creciente. La sucesión $(x_{f(n)})$ es una **subsucesión** de la sucesión (x_n).
- (x_n) **converge** a l ssi toda subsucesión $(x_{f(n)})$ converge a l.
- **Bolzano-Weierstrass:** Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f es **continua** en $x_0 \in A$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- **Caracterización $\varepsilon - \delta$ de la continuidad:** f es continua en x_0 ssi $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

P1. Sea (x_n) una sucesión tal que las subsucesiones (x_{2n}), (x_{2n+1}) y (x_{3n}) son convergentes. Demuestre que la sucesión (x_n) es convergente.

P2. Considere una sucesión (u_n) que verifica

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n} = l, \quad \lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0.$$

Demuestre que (u_n) también converge a l.

P3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y (a_n) una sucesión en $[a, b]$, no necesariamente convergente, tal que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$. Demuestre que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = l$.

P4. Usando la caracterización $\varepsilon - \delta$ muestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en 0.

P5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Probar que $f(x) = ax$ para cierto $a \in \mathbb{R}$.

P6. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función que satisface $f(xy) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in (0, \infty)$. Demuestre que si f es continua en $x = 1$ entonces f es continua en todo su dominio.

P7. Si $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = k, \quad k \in \mathbb{R}$. Pruebe que $f(x)$ es uniformemente continua en $[a, \infty)$.