Auxiliar 6: IN77O - Modelos y Algoritmos de Optimización

Prof: Fernando Ordóñez
Aux: Tomás Lagos - Tomás Valdivia
Otoño 2018, 10 de Mayo

P1

Equivalencia de problemas convexos. Muestre que los siguientes tres problemas convexos son equivalentes, explicando claramente cómo se obtiene la solución de un problema a otro. En lo siguiente los datos son la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con filas a_i^T, el vector $b \in \mathbb{R}$ y la constante $M > 0$

(a) El problema de *mínimos cuadrados robusto.*

$$\underset{x}{\text{minimizar}} \quad \sum_i^m \phi(a_i^T x - b_i),$$

donde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es definida como

$$\phi(u) = \begin{cases} u^2 & |u| \leq M \\ M(2|u| - M) & |u| > M. \end{cases}$$

(b) *Mínimos cuadrados con pesos variables.*

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i^m \frac{(a_i^T x - b_i)^2}{w_i + 1} + M^2 \vec{1}^T w, \\ \text{sujeto a} \quad & w \succcurlyeq 0, \end{aligned}$$

con variables $x \in \mathbb{R}^n$ y $w \in \mathbb{R}^m$.

(c) *Problema cuadrático.*

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i^m (u_i^2 + 2Mv_i) \\ \text{sujeto a} \quad & -u - v \preccurlyeq Ax - b \preccurlyeq u + v \\ & 0 \preccurlyeq u \preccurlyeq M\vec{1} \\ & 0 \preccurlyeq v. \end{aligned}$$

P2

Función perspectiva

(a) Muestre que para $p > 1$,

$$f(x,t) = \frac{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}{t^{p-1}} = \frac{||x||_p^p}{t^{p-1}}$$

es convexa en $\{(x,t) | t > 0\}$.

(b) Muestre que

$$f(x) = \frac{||Ax + b||_2^2}{c^T x + d}$$

es convexa en $\{x | c^T x + d > 0\}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$.

P3

Reglas de composición Pruebe que las siguientes funciones son convexas.

(a) $f(x) = -\log(-\log(\sum_i^m \exp^{a_i^T x + b_i}$ en el dominio $\{x | \sum_i^m \exp^{a_i^T x + b_i} < 1\}$. Puede usar que $\log(\sum_i^m \exp^{y_i})$ es convexa.

(b) $f(x, u, v) = -\sqrt{uv - x^T x}$ en el dominio $\{(x, u, v) | uv > x^T x, u, v > 0\}$. Use el hecho de que $x^T x/u$ es convexa en (x, u), y que $-\sqrt{x_1 x_2}$ es convexa en $\mathbb{R}^2_{++}$

(c) $f(x, u, v) = -\log uv - x^T x$ en el dominio $\{(x, u, v) | uv > x^T x, u, v > 0\}$.

(d) $f(x, t) = -(t^p - ||x||_p^p)^{1/p}$ para $p > 1$ y en el dominio $\{(x, t) | t \geq ||x||_p\}$. Puede usar el ejercicio anterior (P2) y que $-x^{1/p} y^{1-1/p}$ es convexa en $\mathbb{R}^2$ (tarea).

(e) $f(x, t) = -\log(t^p - ||x||_p^p)$ para $p > 1$ y en el dominio $\{(x, t) | t > ||x||_p\}$. Puede usar el ejercicio anterior (P2).