Auxiliar 9: IN77O - Modelos y Algoritmos de Optimización

Prof: Fernando Ordóñez
Aux: Tomás Lagos - Tomás Valdivia
Otoño 2018, 7 de Junio

P1

Considere el problema:

$$\begin{array}{ll} \min & \lambda_{\max}\big((\sum_i x_i v_i v_i^T)^{-1}\big) \\ \text{s.a} & x \succcurlyeq 0, 1^T x = 1 \end{array}$$

Con $v_i,\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ conocidos y de rango completo.

a) Reformule el problema como

$$\begin{array}{ll} \min & \dfrac{1}{t} \\ \text{s.a} & \sum_i x_i v_i v_i^T \succcurlyeq tI \\ & x \succcurlyeq 0, 1^T x = 1 \end{array}$$

b) Encuentre el dual y simplifique lo más que pueda.

P2

Sea f convexa. Cuando el método de Newton está en un punto donde $\nabla^2 f(x)$ no es invertible, no hay dirección de Newton. En ese caso se utiliza un método de *trust region*, que entrega la dirección Δx_{tr} resolviendo:

$$(P)\ \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2} v^t \nabla^2 f(x) v + \nabla f(x)^T v \\ \text{s.a.} & ||v||_2^2 \leq \gamma \end{array}$$

donde $\{v \mid ||v||_2^2 \leq \gamma\}$ es la *trust region* que es donde se considera válida la aproximación cuadrática de f. Muestre que

$$\Delta x_{tr} = \text{argmin}\ \frac{1}{2} v^t \nabla^2 f(x) v + \nabla f(x)^T v + \hat{\beta} ||v||_2^2$$

para algún $\hat{\beta}$. Luego caracterice el $\hat{\beta}$.

P2

La Función de Cobb-Douglas: Considere el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max x^\alpha y^{1-\alpha} \\ p_1 x + p_2 y = w \\ x, y \geq 0 \end{aligned}$$

en donde $p_1, p_2, w > 0$, y $\alpha \in [0, 1]$ son constantes.

1. Escriba las condiciones de KKT y encuentre una solución de ellas, en función de p_1, p_2, w y α.
2. ¿Se puede decir que esta solución es óptima para el problema original? Justifique.
3. Encuentre el multiplicador λ, en función de p_1, p_2, w y α.