IN3202 Microeconomía | Profesores: Juan Escobar, Andrea Canales
Otoño 2014 | Auxiliares: Gian Luca Carniglia, Gerardo Rojas

**Pauta Control 2**

1. (30pts) Use sus conocimientos de teoría de juegos y no más de 6 renglones para responder las siguientes preguntas. Su respuesta no será evaluada si excede el límite o está escrita con letra ilegible.

   a. (15pts) Explique, utilizando la materia vista en clases, alguno de los aspectos estratégicos que explican la crisis de Ucrania.

      La lectura de Crimea tiene cuatro puntos centrales. Para obtener todo el puntaje (15pts) basta explicar sólo uno de estos.

      – **Disuasión nuclear:** Al dividirse la Unión Soviética, Ucrania devolvió todos los desechos nucleares a Rusia, lo que disuade cualquier amenaza ya que esta podría desencadenar el uso de armas nucleares.
      – **Puntos de inflexión:** En los últimos años, todos los conflictos entre países se han resuelto de manera pacífica; sin embargo, en el siglo pasado la mayoría se resolvía de manera violenta. Esto nos lleva a pensar que existen dos equilibrios: uno violento y uno pacífico; por lo tanto, una intervención rusa podría provocar un cambio de fase y mover al mundo de un equilibrio pacífico a un equilibrio violento.
      – **Disuasión de los Mercados:** Ya que Rusia es ahora una economía mucho más globalizada que durante la Unión Soviética, se ve afectada por las decisiones globales. Por ello, un día luego de lo de Crimea, el mercado cayó más de un 10%, por lo cual la decisiones políticas de Rusia tienen un impacto importante en su economía; es decir, eleva los costos de una intervención en Crimea, lo cual hace menos factible que esto suceda.
      – **Credibilidad y consecuencias:** Por su parte, Estados Unidos debe decidir si intervenir o no, si lo hace debería intervenir en todos los conflictos mundiales de este tipo, lo cual parece ser una amenaza no creíble debido a los altos costos que significaría para los norteamericanos esta decisión.

   b. (15pts) Explique intuitivamente el rol del factor de descuento en el Teorema del Pueblo.

      El teorema del pueblo dice que en un jugo infinitamente repetido, cualquier pago factible que deje a todos los jugadores mejor que en el peor de los casos, es alcanzable en un equilibrio de Nash, *para algún factor de descuento suficientemente grande*. El factor de descuento refleja la paciencia de los jugadores; para este teorema, si los jugadores son lo suficientemente pacientes, estará en su interés mantener la cooperación y así alcanzar pagos mayores al EN del juego de etapa (15pts).

2. (30pts) Considere el siguiente juego de provisión de un bien público con $n$ individuos. Cada individuo debe decidir si contribuir o no a un bien público, y el bien es provisto si al menos un individuo contribuye. El costo de contribuir al bien público es $c \leq 1$ para cada individuo. La valoración del bien del individuo $i$ es $v_i$, que es su información privada. Suponemos que las valoraciones $(v_i)$ se distribuyen independiente y uniformente en $[0, 1]$.

   a. (15pts) Encuentre un equilibrio bayesiano simétrico en el cual un individuo $i$ contribuye ssi $v_i > v^*$, donde $v^*$ debe ser encontrado.

   Modelamos el problema como un juego bayesiano:

   - Jugadores: $I = \{1, ..., n\}$
   - Acciones: $S_i = \{C, NC\}$
   - Tipos: $v_i \sim U(0, 1)$
   - Pagos:

   $$u_i(s_i, s_{-i}, v_i) = \begin{cases} v_i - c & \text{if } s_i = C \\ v_i & \text{if } s_i = NC \ \wedge \ \exists j \neq i \ : \ s_j = C \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

   Proponemos estrategias tipo "cut-off"

   $$s_j(v_j) = \begin{cases} C & \text{if } v_j > v^* \\ NC & \text{otherwise} \end{cases}$$

   Buscamos $v^*$ tal que el perfil de estrategias descrito anteriormente sea un EB. Para encontrarlo, nos damos cuenta que si un jugador tiene valoración $v^*$, debe estar indiferente entre cooperar y no cooperar; es decir, debe cumplirse:

   $$\mathbb{E}U_i(C, v^*, s_{-i}(v_{-i})) = \mathbb{E}U_i(NC, v^*, s_{-i}(v_{-i})) \tag{0.1}$$

   Calculuemos las utilidades esperadas:
   $\mathbb{E}U_i(C, v^*, s_{-i}(v_{-i})) = v^* - c$

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}U_i(NC, v^*, s_{-i}(v_{-i})) &= v^* \cdot \mathbb{P}(\exists j \neq i \ : \ s_j = C) \\ &= v^*(1 - \mathbb{P}(\forall j \neq i \ : \ s_j = NC)) \\ &= v^*(1 - \mathbb{P}(\forall j \neq i \ : \ v_j \leq v^*)) \\ &= v^*(1 - \mathbb{P}(v_j \leq v^*)^{n-1}) \\ &= v^*(1 - (v^*)^{n-1}) \\ &= v^* - (v^*)^n \end{aligned}$$

   Con esto, la ecuación (1) se traduce en:

   $$v^* - c = v^* - (v^*)^n \iff v^* = \sqrt[n]{c}$$

   (15pts)

   b. (10pts) Determine la probabilidad de proveer el bien público.

   En el EB, la probabilidad de que el bien público sea provisto es:

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists i \in I \ : \ s_i = C) &= 1 - \mathbb{P}(\forall i \in I \ : \ s_i = NC) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\forall i \in I \ : \ v_i \leq \sqrt[n]{c}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(s_i \leq \sqrt[n]{c})^n \\ &= 1 - (\sqrt[n]{c})^n \\ &= 1 - c \end{aligned}$$

   (10pts)

c. ¿(5pts) Cómo varía el equilibrio encontrado a medida que aumenta $n$? Explique.

Notamos que la probabilidad de que el bien público sea provisto no depende de $n$. Por lo tanto, no varía a medida que aumenta el número de jugadores. (5pts)

Intuitivamente, se espera que a mayor cantidad de jugadores, más probable sea la provisión del bien; sin embargo, también ocurre que mientras más jugadores haya, es más probable que un rival provea el bien, lo que hace que cada jugador tenga menos incentivos a cooperar. En este problema, ambos efectos se contrarrestan, haciendo que las chances no dependan de $n$.

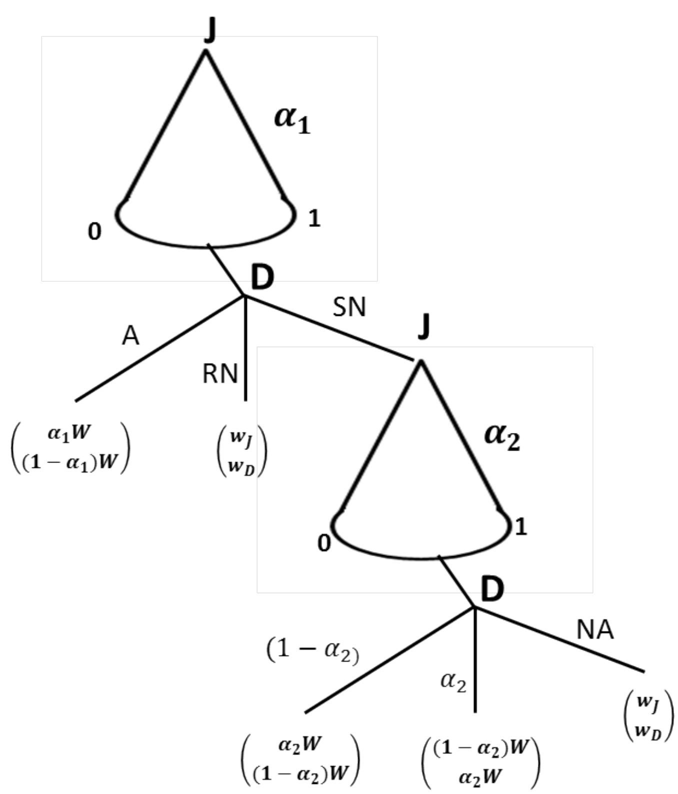
3. (30pts) Dos primos Juan y Diego han encontrado trabajos cuyos salarios son $w_J$ y $w_D$ respectivamente. Sin embargo, Juan, antes de aceptar el trabajo le propone a Diego un negocio para el cual sólo necesitan dedicarse completamente (no requiere inversión extra). El negocio les entrega una ganancia $W > w_J + w_D$, pero para realizarlo se necesita que ambos primos se involucren completamente en el proyecto. Antes de realizar el proyecto deben decidir cómo repartirse las ganacias finales del proyecto, para ello realizan el siguiente juego de dos etapas:

- ETAPA 1:
  - Juan le ofrece una repartición de las ganancias de tipo $\alpha_1$ para Juan, $1-\alpha_1$ par Diego con $\alpha_1 \in [0,1]$.
  - Diego tiene tres opciones: Aceptar el trato (A) (con pagos $\alpha_1 W$ para Juan y $(1-\alpha_1)W$ para Diego), romper la negociación (RN) (en cuyo caso deciden entrar a sus trabajos y el juego termina) o seguir negociando (SN). Si Diego decide seguir negociando pasamos a la Etapa 2.
- ETAPA 2:
  - Nuevamente Juan ofrece una fracción $\alpha_2 \in [0,1]$.
  - Diego escoge entre tres alternativas: tomar $\alpha_2 W$, tomar $(1-\alpha_2)W$, no aceptar la oferta (en cuyo caso el proyecto no se ejecuta y ambos toman sus trabajos). Si Diego toma una de las dos fracciones, la diferencia es para Juan.

Los jugadores descuentan a una tasa $\delta < 1$.

(10pts) Describa el juego en forma extensiva.

Para describir el juego en forma extensiva es necesario determinar jugadores, árbol, conjuntos de información y pagos. El juego queda (10pts):




a.

Figure 1: Juego completo.

b. (10pts) Encuentre todos los EPS de la ETAPA 2 del juego.

Para encontrar los EPS de la ETAPA 2 es necesario considerar que la oferta de Juan debe ser tal que induzca a Diego a maximizar la utilidad de Juan ($u_J$), para lo cual Diego también maximiza su utilidad ($u_D$).

Evaluemos qué debe suceder para que sea posible cada elección.

- Diego elige la rama $(1-\alpha_2)$

  Debe ocurrir que el pago de esta elección sea mayor que el pago de las otras dos:
  $(1-\alpha_2)W \geq \alpha_2 W$ & $(1-\alpha_2)W \geq w_D$

  $\alpha_2 \leq \frac{1}{2}$ & $\alpha_2 \leq 1-\frac{w_D}{W}$

  $\Rightarrow \alpha_2 = \min\{\frac{1}{2}, 1-\frac{w_D}{W}\}$

- Diego elige la rama $\alpha_2$

  $\alpha_2 W \geq$(a-$\alpha_2$)$W$ & $\alpha_2 W \geq$w$_D$

  $\alpha_2 \geq \frac{1}{2}$&$\alpha_2 \geq \frac{w_D}{W}$

  $\Rightarrow \alpha_2 = \max\{\frac{1}{2}, \frac{w_D}{W}\}$

- Diego elige NA

  $w_D \geq \alpha_2 W$ & $w_D \geq (1-\alpha_2)W$
  $\alpha_2 \leq \frac{w_D}{W}$ & $\alpha_2 \geq 1-\frac{w_D}{W}$
  $\Rightarrow \alpha_2$ debe estar en el intervalo $[1-\frac{w_D}{W}, \frac{w_D}{W}]$

Por otra parte, veamos qué debe ofrecer Juan a fin de máximizar su pago:

- Juan busca que Diego elija la rama $(1-\alpha_2)$

  Debe ocurrir que el pago para Juan de esta elección sea mayor que el pago de las otras dos opciones:
  $\alpha_2 W \geq$(a-$\alpha_2$)$W$ & $\alpha_2 W \geq$w$_J$

  $\alpha_2 \geq \frac{1}{2}$&$\alpha_2 \geq \frac{w_J}{W}$

  $\Rightarrow \alpha_2 = \max\{\frac{1}{2}, \frac{w_J}{W}\}$

- Juan busca que Diego elija la rama $\alpha_2$

  $(1-\alpha_2)W \geq \alpha_2 W$ & $(1-\alpha_2)W \geq w_J$

  $\alpha_2 \leq \frac{1}{2}$ & $\alpha_2 \leq 1-\frac{w_J}{W}$

  $\Rightarrow \alpha_2 = \min\{\frac{1}{2}, 1-\frac{w_J}{W}\}$

- Juan busca que Diego elija NA

  $w_J \geq \alpha_2 W$ & $w_J \geq (1-\alpha_2)W$
  $\alpha_2 \leq \frac{w_J}{W}$ & $\alpha_2 \geq 1-\frac{w_J}{W}$
  $\Rightarrow \alpha_2$ debe estar en el intervalo $[1-\frac{w_J}{W}, \frac{w_J}{W}]$

Al comparar cada elección de $\alpha_2$ con el efecto que genera, se observa que para la primera rama ($(1-\alpha_2)$) la única oferta consistente con EPS es $\alpha_2 = 12$. Sucede lo mismo con la segunda rama ( $\alpha_2$). Por último, la tercera rama sólo se alcanza como EPS si es que la oferta es $\frac{1}{2}$ y la división de W es equitativa. Como esto último es desconocido, se descarta esta posibilidad de EPS.

Así, dada la oferta $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, hay un EPS si es que Diego elige la rama $(1-\alpha_2)$ y otro si elige la rama $\alpha_2$.

$$\text{EPS}_1 = \{(\alpha_2 = \tfrac{1}{2}),((1-\alpha_2))\ \}$$
$$\text{EPS}_2 = \{(\alpha_2 = \tfrac{1}{2}),(\alpha_2)\ \}$$

Para ambos jugadores el pago es $\frac{W}{2}$ (10pts).

**Alternativamente** el juego puede ser modelado incluyendo sólo dos opciones para Diego en la segunda etapa: NA y Tomar la oferta más alta entre $\alpha_2 W$ y $(1-\alpha_2)W$, lo que representaremos como A. Si Diego elige A, entonces los pagos son $u_Diego$ =max$\{\alpha_2 W,(1-\alpha_2)W\}y$u$_Juan$ =min$\{\alpha_2 W,(1-\alpha_2)W\}$. Así, hay un único EPS de la forma:

$$\text{EPS}_1 = \{(\alpha_2 = \tfrac{1}{2}),(\text{A})\ \}$$

Para ambos jugadores el pago es $\frac{W}{2}$ (10pts).

c. (10pts) Encuentre todos los EPS del juego.

Después de haber resuelto la ETAPA 2, el árbol resultante es el de la Figura 2.

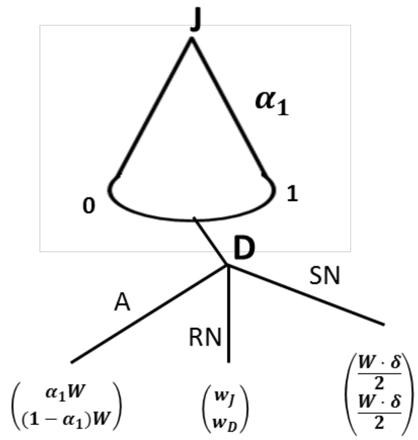



Figure 2: Juego con la segunda etapa resuelta.

Notemos que para que el juego tenga sentido, tiene que estar en el interés de Juan el querer negociar, es decir, se debe cumplir que:

$\alpha_1 W \geq w_J \alpha_1 W \geq \frac{W \cdot \delta}{2}$
Veamos los casos posibles:

- Juan ofrece $\alpha_1$ para que Diego acepte en la primera etapa y el salario de reserva de Diego no es lo suficientemente atractivo

  Juan ofrece $\alpha_1$ tal que $(1-\alpha_1)W \geq \frac{W \cdot \delta}{2}$
  $\Rightarrow \alpha_1 \leq 1 - \frac{\delta}{2}$
  Diego acepta, y el pago de Juan es $(1-\frac{\delta}{2})W$ que es mayor que $\frac{W \cdot \delta}{2}$, pues $\delta < 1$

- Juan oferta $\alpha_1$, pero Diego no acepta porque su salario de reserva es más atractivo
  En este caso se cumple, para Diego, que $(1-\alpha_1)W \leq w_D$. Juan adelanta la respuesta y ofrece $\alpha_1 = 1 - \frac{w_D}{W}$, con lo que Diego acepta. El pago de Juan es $(1-\frac{w_D}{W})W = W - w_D > w_J$.

- Para el Diego es más atractivo el pago del siguiente periodo
  Juan realiza una oferta tal que se cumpla $(1-\alpha_1)W \geq \frac{W \cdot \delta}{2}$. Diego acepta y se tienen los mismos pagos que en el primer caso.

  Así, para el juego de la Figura 2 se tienen dos EPS:

$$\text{EPS}_1 = \{(\alpha_1 = 1 - \tfrac{\delta}{2}),(\text{A})\}$$
$$\text{EPS}_2 = \{(\alpha_1 = 1 - \tfrac{w_D}{W}),(\text{A})\}$$

  Donde el $EPS_1$ cubre el primer y último de los casos mencionados (10pts).