Profesor: Juan Escobar, Andrea Canales
Auxiliares: Gian Luca Carniglia, Claudio Palominos, Gerardo Rojas, y Rodrigo Zigante

Pauta Control 2

1. (30pts) Use sus conocimientos de teoría de juegos y no m ás de una plana para responder las siguientes preguntas. Su respuesta no será evaluada si está escrita con letra ilegible.

   a. (15pts) De acuerdo a Preston McAfee para Enron, eBay e Intel la confianza de sus consumidores es clave en sus operaciones. Explique la observación del autor en cada uno de estos tres casos. Explique también cómo las herramientas estudiadas en el curso le permiten entender la confianza como un determinante del éxito de transacciones.

   R: El autor señala que en el caso de Enron, la confianza era lo que permitía sostener los contratos de largo plazo. Una vez que se divulgó la noticia sobre las malas prácticas contables de Enron, se debilitó la capacidad de la compañia para actuar como intermediario, pues no se creía que pudiese cumplir con lo prometido en los contratos. En este caso, los compradores de gas natural querían comprar menos, mientras los vendedores querían vender más.

   En el caso de eBay, McAfee explica que la confianza en el sistema de compras es lo que sostiene el sistema. Se han detectado numerosos fraudes, y si eso sigue ocurriendo, las personas dejarán de comprar por eBay, porque justamente no se trata de un mecanismo confiable de compras.

   Sobre Intel, el autor describe cómo el descubrimiento, por parte de los usuarios, de un error (*bug*) en sus procesadores disminuye la confianza sobre lo que esta firma vende, dejándola atrás frente a otros competidores. Lo que en este caso quiebra la confianza es que Intel se haya negado a reemplazar los procesadores a menos que los clientes proveyeran una "necesidad" por "precisión científica".

   En términos de lo estudiado en el curso, se puede pensar en la confianza como el factor que determina el inteés de los jugadores para seguir jugando en el futuro, lo que corresponde a una interpretación del factor de descuento que se utiliza en juegos dinámicos. También es posible pensar que en la confianza como la creencia que un jugador tiene sobre las motivaciones del rival: si estas motivaciones se desmarcan de las creencias del jugador, permitiendo que el juego entregue resultados adversos al jugador, entonces probablemente no tendrá incentivos a jugar.

   b. (15pts) Durante las primeras semanas del curso vimos que precios competitivos resultan de la interacción estratégica entre dos firmas que compite fijando precios (con costos lineales). Explique cómo modelos más realistas de interacción resultarán en precios no competitivos.

   R: El resultado de un juego de Bertrand con dos firmas y bienes homogéneos es, matem, igual al resultado del modelo de competencia perfecta. Esto es lo que se conoce como la paradoja de Bertrand. En este modelo, la firma que gana todo el mercado y vende todos sus productos es aquella que tiene el precio más bajo. El equilibrio se alcanza cuando las dos firmas no pueden seguir bajando el precio, llegando a $p = CM$.

   Bertrand con bienes homogéneos tiene supuestos tales que si se modifican, se obtienen resultados más parecidos a los de un mercado no competitivo. De esta manera, introducir la diferenciación de bienes recupera un resultado no competitivo, distinto al de competencia perfecta, en que ambas firmas obtienen rentas.

2. (30pts) Pedro y Juan son dos amigos que juegan repetidamente el siguiente juego de favores. En cada $t \geq 1$, sólo un amigo necesita ayuda; suponemos que con probabilidad $\pi_i \geq 0$ el jugador i necesita ayuda con $\pi^P + \pi^J = 1$ (las realizaciones son iid a través del tiempo). Si i es el jugador que necesita ayuda, entonces $-i$ puede ayudar (A) o no ayudar (NA); si $-i$ no ayuda entonces los pagos del periodo son 0 para ambos jugadores, mientras que si $-i$ ayuda entonces i tiene un beneficio igual a 1 pero $-i$ incurre un costo igual a $c > 0$, con $1 > c$. Los amigos descuentas pagos con un factor de descuento $\delta < 1$.

   a. (5pts) Encuentre el EN del juego de etapa.
   R: En el juego de etapa, si i es el jugador que necesita ayuda, sólo el jugador $-i$ tiene acciones disponibles: ayudar (A) o no ayudar (NA), en forma normal:

	A	NA
i	$1, -c$	$0, 0$

   Dado que NA domina estrictamente a A para el jugador $-i$, el $EN = \{NA\}$. **(5pts)**.

   b. (10pts) Muestre que si $\pi_i - c\pi_{-i} > 0$ para todo $i = P, J$, entonces para todo $\delta \geq \max\{\frac{c}{\pi_i - c\pi_{-i} + c} \mid i = P, J\}$ existe un EPS (en estrategias gatillo) tal que en el camino del equilibrio los amigos se ayudan.

   R: Consideremos la estrategia gatillo siguiente: El jugador i elige ayudar (A) en el periodo t si $-i$ necesita ayuda y si nadie ha elegido no ayudar (NA) en cualquier periodo $\bar{t} < t$ (para $i \in \{Pedro, Juan\}$), en caso contrario, elige no ayudar (NA) **(2pts)**.

   Para que esta estrategia induzca un equilibrio perfecto en subjuegos, el valor presente esperado de seguir la estrategia debe ser mayor al VP de desviarse, es decir:

$$\mathbb{E}[VP_i] \geq 0$$

   El lado derecho de la desigualdad representa el mejor desvío en caso de que el jugador i decide si ayudar o no. Los pagos en los siguientes periodos también son, dado que nadie ayuda, siguiendo la estrategia gatillo.

$$\mathbb{E}[VP_i] = -c + (\pi_i - c\pi_{-i}) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t$$

$$\mathbb{E}[VP_i] = -c + (\pi_i - c\pi_{-i}) \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)$$

   Nótese que estamos considerando el peor caso, es decir, cuando el jugador i debe decidir ayudar incurriendo en un costo c. Luego, la desigualdad que se debe cumplir es más estricta y contempla el caso en que no debe decidir. La desigualdad se puede escribir, entonces

$$-c + (\pi_i - c\pi_{-i}) \frac{\delta}{1-\delta} \geq 0$$

   (5pts).
   Reordenando términos se tiene que

$$\delta \geq \frac{c}{\pi_i - c\pi_{-i} + c}$$

   Como este valor es distinto para cada jugador, dependiendo de las probabilidades de necesitar ayuda, para que la estrategia gatillo induzca el EPS

$$\delta \geq \max\left\{\frac{c}{\pi_i - c\pi_{-i} + c} \mid i = P, J\right\}$$

   y adems el denominador debe ser mayor a c, es decir $\pi_i - c\pi_{-i} > 0$ para $i = P, J$. Esto es, la condición necesaria para que el valor δ encontrado sea menor que 1 y el EPS exista. **(3pts)**.

En lo que sigue consideramos una situación en la que Pedro tiende a necesitar más ayuda que Juan. Más específicamente, suponemos $\pi_P = 2/3$ y $\pi_J = 1/3$ y, por simplicidad, $c = 1/2$.

c. (5pts) Muestre que las estrategias gatillo usadas en b no son un EPS. Explique intuitivamente su resultado.

R: Recordemos que el valor δ para que sea conveniente seguir la recomendación inducida por la estrategia gatillo es distino para Juan y Pedro, con lo valores dados:

$$\delta_P = \frac{1/2}{2/3 - (1/2)(1/3) + 1/2} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\delta_J = \frac{1/2}{1/3 - (1/2)(2/3) + 1/2} = 1$$

Esto significa que el acuerdo será conveniente para Pedro (quien necesita más ayuda) pero no para Juan, pues $\delta < 1$ para ambos jugadores. Luego, no se tiene EPS anterior **(5pts)**..

d. (10pts) Consideremos estrategias asimétricas, en las cuales en el camino del equilibrio Juan no siempre ayuda a Pedro. Al principio de cada periodo, permitimos que los amigos observen la realización de una moneda balanceada. En el camino del equilibrio permitimos que si Pedro necesita ayuda pero la moneda muestra sello, Juan no hace el favor a Pedro; en todos los otros escenarios, el favor debe hacerse. Muestre que si $\delta > 3/4$, entonces existe un EPS que tiene como resultado el camino del equilibrio descrito. Explique intuitivamente por qué el permitir que Juan no haga algunos favores hace más fácil que en equilibrio se hagan favores.

R: Como antes, el valor esperado de seguir la estrategia gatillo es

$$\mathbb{E}[VP_J] = -c + \left(\pi_J + \pi_P\left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot c\right)\right)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^t$$

El pago esperado por desviarse es 0. Luego, para que Juan quiera seguir la estrategia, se debe cumplir que

$$-c + \left(\pi_J + \pi_P\left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot c\right)\right)\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) \geq 0$$

Es decir,

$$\delta \geq \frac{c}{\pi_J - \frac{1}{2}c\pi_P + c}$$

Usando los valores anteriores para π_J, π_P y c, se tiene $\delta \geq \frac{3}{4}$ **(3pts)**. De igual forma, para que Pedro quiera seguir la estrategia, se debe cumplir que

$$\mathbb{E}[VP_P] = -c + \left(\frac{1}{2}\pi_P - c\pi_J\right)\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) \geq 0$$

Es decir,

$$\delta \geq \frac{c}{\frac{1}{2}\pi_P - c\pi_J + c}$$

Usando los valores anteriores para π_J, π_P y c, se tiene $\delta \geq \frac{3}{4}$, igual que para Juan **(3pts)**. Luego para $\delta > 3/4$ se tiene el equilibrio descrito, donde Pedro ayuda siempre que Juan necesita ayuda y Juan ayuda siempre que Pedro necesite ayuda y la moneda muestre sello.

A Juan no le conviene hacer favores todo el tiempo pues es probable que Pedro necesite ayuda el doble de veces. Al permitir a Juan que sólo ayude la mitad de las veces, se reduce el costo incurrido por Juan y se corrige la "'asimetría de las necesidades"' (representada por $\pi_P = 2/3$ y $\pi_J = 1/3$). Dicho de otro modo, la probabilidad de cada uno de recibir ayuda cuando lo necesita es $\pi = \pi_J = \bar{\pi}_P = 1/3$, pues para ambos

$$\delta \geq \frac{c}{\pi - c\pi + c} = \frac{3}{4}$$

(4pts)

3. (30pts) Dos firmas dedicadas al rubro de la comida, desean adjudicarse la concesión de comidas en cierta Universidad. Cada firma i ofrece simultáneamente un "soborno" s_i a la Universidad. La Universidad observa las ofertas y le otorga la concesión a quien le ofrece el "soborno" más alto y rechaza a la otra firma. Si el soborno de la firma es rechazado, la firma sale al mercado y gana cero. Si el soborno es aceptado, la firma se convierte en monopolista en la Universidad y enfrenta una demanda inversa igual a $P(Q) = 1 - Q$. El costo marginal de cada firma c se distribuye Uniforme $[0, 1]$. Cada firma conoce su costo marginal, pero desconoce el de su competidor.

   a. (12pts)Una vez que una firma se adjudica la concesión ¿ Cuánto produce? ¿Cuales son sus ganacias?

      R: Cuando la firma se adjudica la concesión produce como monopolio. El problema de la firma es:

      $$\max \pi = P(Q)Q - C(Q)$$

      La CPO del problema es:

      $$1 - 2Q - c_i = 0$$

      Despejando, se tiene que la firma ganadora produce $Q^* = \frac{1-c_i}{2}$ **(6pts)**.

      Las ganancias de la firma quedan determinadas como la produccin Q^*, dada la demanda.

      $$\pi(c_i) = Q^*(1 - Q^* - c_i)$$

      $$\pi(c_i) = \tfrac{1-c_i}{2}(1 - \tfrac{1-c_i}{2} - c) = \tfrac{1-c_i}{2}(\tfrac{2-1+c_i-2c_i}{2}) = \tfrac{(1-c_i)^2}{4}$$

      Así, las ganancias de la firma que se adjudica la consesión son $\pi(c_i) = \frac{(1-c_i)^2}{4}$ **(6pts)**.

   b. (13pts)Determine un equilibrio bayesiano simétrico, en el cual ambas firmas ofrecen un soborno de la forma: $s_i = a + b(1 - c_i)^2$

      R: El juego queda determinado por los siguientes elementos:

      – Jugadores: $I = 1, 2$
      – Acciones: $s_i \geq 0$
      – Tipos: $c_i \in [0, 1]$, c_i distribuye U[0,1]
      – Pagos:

      $$u_i(s_i, c_i, s_{-i}) = \begin{cases} \pi(c_i) - s_i & si \quad \text{La firma } i \text{ gana} \\ (\pi(c_i) - s_i)/2 & si \quad \text{Las firmas empatan} \\ 0 & si \quad \text{La firma } i \text{ pierde} \end{cases}$$

      La utilidad esperada en esta caso corresponde a:

      $$UE_i(s_i, c_i, s_{-i}) = (\pi(c_i) - s_i) \cdot \mathbb{P}(Ganar) + \tfrac{1}{2}(\pi(c_i) - s_i) \cdot \mathbb{P}(Empate) + 0 \cdot \mathbb{P}(Perder)$$

      La probabilidad de empate es cero. Luego, la utilidad esperada queda determinada sólo por el pago y la probabilidad en el caso de ganar.

      Para estrategias simétricas, $\sigma(c_i)$, la probabilidad de ganar se calcula de la siguiente manera:

      $$\mathbb{P}(Ganar) = \mathbb{P}(s_i > s_{-i}) = \mathbb{P}(s_i > \sigma(s_{-i}))$$

      Dado que la estrategia es decrecinte en los costos, la inversa también es decreciente, por lo que la aplicación de la inversa hace cambiar el signo. La probabilidad de ganar queda:

$$\mathbb{P}(s_i > \sigma(s_{-i})) = \mathbb{P}(\sigma^{-1}(s_i) < s_{-i}) = 1 - \mathbb{P}(\sigma^{-1}(s_i) > s_{-i}) = 1 - \sigma^{-1}(s_i)$$

Esto último se debe a que c_{-i} distribuye uniforme [0,1].

La utilidad esperada, finalmente, se expresa como:

$$UE_i(s_i, c_i) = (\pi(c_i) - s_i) \cdot (1 - \sigma^{-1}(s_i)) \text{ } \textbf{(4pts)}.$$

La condición de equilibrio es que los jugadores estén maximizando su utilidad. A partir de la utilidad esperada se obtiene la CPO del problema:

$UE_i(s_i, c_i) = \pi(c_i) - \pi(c_i)\sigma^{-1}(s_i) - s_i + s_i\sigma^{-1}(s_i)$

La CPO del problema es:

$$-\left(1 - \sigma^{-1}(s_i)\right) - (\pi(c_i) - s_i)\, \tfrac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(s_i))} = 0$$

Evaluando en la estrategia óptima: $s_i = \sigma(c_i)$

$$-(1 - c_i) - (\pi(c_i) - \sigma(c_i))\, \tfrac{1}{\sigma'(c_i)} = 0$$

Reordenando

$$-(1 - c_i)\,\sigma'(c_i) = -(\pi(c_i) - \sigma(c_i))$$

$$(1 - c_i) \cdot \sigma'(c_i) - \sigma(c_i) = -\pi(c_i) \text{ } \textbf{(3pts)}.$$

$$((1 - c_i) \cdot \sigma(c_i))' = -\pi(c_i)$$

E Integrando y reemplazando $\pi(c_i)$ se tiene:

$$((1 - c_i) \cdot \sigma(c_i))' = -\left(\tfrac{1-c_i}{2}\right)^2$$

$$((1 - c_i) \cdot \sigma(c_i)) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1-c_i}{2}\right)^3 + a$$

$$\sigma(c_i) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{(1-c_i)^2}{2^3} + \tfrac{a}{(1-c_i)}$$

$$\sigma(c_i) = \tfrac{(1-c_i)^2}{12} + \tfrac{a}{(1-c_i)}$$

De la CB ($\sigma(1) = 0$), se sabe que en la forma propuesta de solución, $\sigma(c_i) = a + b(1-c_i)^2$, a debe valer cero (**(2pts)**). As mismo, $b = \frac{1}{12}$ Así, el equilibrio bayesiano simétrico queda: $\sigma(c_i) = \frac{1}{12} \cdot (1 - c_i)^2$ **(4pts)**.

Alternativamente, el problema puede resolverse de la siguiente manera:
Dada la EDO,

$$-\pi(c_i)\tfrac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(s_i))} - 1 + \sigma^{-1}(s_i) + s_i\tfrac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(s_i))} = 0$$

Evaluando en la estrategia óptima: $s_i = \sigma(c_i)$

$$-\pi(c_i)\tfrac{1}{\sigma'(c_i)} - 1 + c_i + \sigma(c_i)\tfrac{1}{\sigma'(c_i)} = 0$$

Reordenando

$$(1 - c_i) + (-\pi(c_i) + \sigma(c_i)) \cdot \tfrac{1}{\sigma'(c_i)} = 0$$

$$(1 - c_i) \cdot \sigma'(c_i) - \sigma(c_i) = -\pi(c_i) \text{ } \textbf{(3pts)}.$$

De la CB ($\sigma(1) = 0$), se sabe que en la forma propuesta de solución, $\sigma(c_i) = a + b(1 - c_i)^2$, a debe valer cero (**(2pts)**). Se sabe, además, que:

$$\sigma'(c_i) = -2b(1 - c_i) \text{ y } \sigma(c_i) = b(1 - c_i^2)$$

Luego, reemplazando la forma propuesta de solución en la EDO:

$$(1 - c_i) \cdot -2b(1 - c_i) - b(1 - c_i)^2 = -\pi(c_i)$$

Sumando los términos de la izquierda y reemplazando $\pi(c_i)$ por el valor encontrado en la parte a

$$-3b(1 - c_i)^2 = -\frac{(1-c_i)^2}{4}$$

Despejando, se llega a $b = 1/12$.

Así, el equilibrio bayesiano simétrico queda: $\sigma(c_i) = \frac{1}{12} \cdot (1 - c_i)^2$ **(4pts)**.

c. (5pts) Suponga que la Universidad está interesada en el precio final que pagarán sus alumnos ¿Tiene incentivos la Universidad para aceptar la oferta de la firma que ofrece el soborno más alto?

R: La firma que ofrece el soborno más alto es la firma que tiene los costos más bajos. La firma con costos más bajos es más eficiente, por lo que la universidad sí debe aceptar el soborno más alto, si es que está preocupada por el precio que pagan sus alumnos (para obtener los 5 puntos basta con esta explicacin).

Matemáticamente, lo anterior se evidencia considerando que:

$$P = 1 - Q^* = 1 - \frac{1-c}{2} = \frac{1+c}{2}$$

A menor costo, menor precio.