IN3202 Microeconomía — Profesor: R. İlkılıç

Primavera 2016

Control II

(Pauta Sugerida)

Tiempo: 90 minutos

P1. (35 puntos) **(Competencia Cournot)** Hay tres firmas que producen el mismo producto a costo cero. Cada firma decide su cantidad de a producir y compiten en un mercado en el cual enfrentan la siguiente función de demanda inversa $p = 1 - (q_1 + q_2 + q_3)$, donde q_i es la producción de la firma i.

a. (10 puntos) Calcule el equilibrio (cantidades y precio) cuando las firmas deciden simultaneamente.
Respuesta: La firma i resuelve:

$$\max_{q_i \geq 0} \quad q_i(1 - (q_i + \sum_{j \neq i} q_j))$$

De donde se obtiene que la función de mejor respuesta de la firma viene dada por:

$$BR_i(q_j, q_k) = \max\{0, (1 - q_j - q_k)/2\}$$

Imponiendo simetría se obtiene que en equilibrio:

$$q_i = \frac{1}{4}\ , \qquad \forall i = 1, 2, 3$$

Y sigue que:

$$Q = \sum_{i=1}^{3} q_i = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{4}$$

Nota: *No es necesario que los alumnos definan la función de mejor respuesta como un máximo. Basta que la definan como la obtenida a partir de la condición de primer orden del problema de optimización.*

b. (25 puntos) Suponemos que primero firma 1 decide decide su cantidad q_1. Después, observando q_1, firmas 2 y 3 deciden sus cantidades simultaneamente. Calcule el equilibrio perfecto en sub-jegos (EPS).
Respuesta: Resolvemos por inducción hacia atrás. En el segundo período del juego, el problema de optimización que resuelven las firmas 2 y 3 es el mismo que resolvían en la parte anterior. Luego, para $i = 2, 3$:

$$BR_i(q_j, q_k) = \max\{0, (1 - q_j - q_k)/2\}$$

Por simetría, la cantidad que producen las firmas 2 y 3 en equilibrio es la misma y viene dada por:

$$q_2^*(q_1) = q_3^*(q_1) = \max\{0, (1 - q_1)/3\} \qquad (\star)$$

Y por lo tanto, en el primer período, la firma 1 resuelve:

$$\max_{q_1 \geq 0} \quad q_1(1 - [q_1 + q_2^*(q_1) + q_3^*(q_1)])$$

Resolviendo este problema se obtiene que en equilibrio:

$$q_1^* = \frac{1}{2} \qquad (\star\star)$$

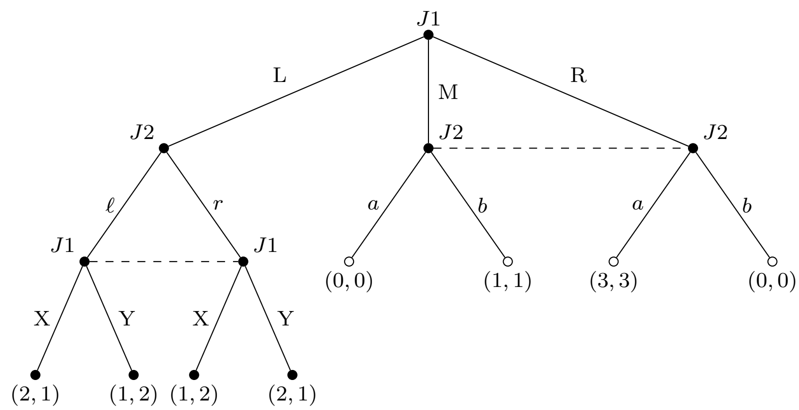
Y sigue que:

$$q_2^* = q_3^* = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{6}$$

El EPS es el definido por ($\star$) y ($\star\star$).

Nota: *Una vez más, no es importante que definan la mejor respuesta como un máximo entre cero y la cantidad obtenida a partir de la condición de primer orden. Sin embargo, si es importante que la jugada de equilibrio de 2 y 3 se defina como función de* q_1. *Para que las estrategias de equilibrio estén correctamente definidas, el alumno debe señalar la jugada de las firmas 2 y 3 aún fuera del camino del equilibrio.*

P2. (35 puntos) **(Equilibrio Sub-juego Perfecto)** Considere el siguiente juego



a. (10 puntos) Determine todos los sub-juegos del juego. Identifíquelos.

Respuesta: Hay dos sub-juegos, el juego completo y el que comienza después que el Jugador 1 haya jugado L.

b. (25 puntos) Encuentre todos los equilibrios en sub-juego perfectos. (Pista: Hay tres EPS)

Respuesta: El sub-juego distinto al juego completo se caracteriza por ser un *matching pennies*. Dado lo anterior, sabemos que el juego posee un único EN, en el cual cada jugador pone igual peso a sus movidas ($EN = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$) . Luego el vector de pagos esperados de equilibrio es $(3/2, 3/2)$.

Tras fijar los pagos de ese sub-juego, el juego se reduce al juego completo sin el sub-juego anterior, el cual puede ser escrito como

		$J2$	
		a	b
	L	$3/2, 3/2$	$3/2, 3/2$
$J1$	M	$0, 0$	$1, 1$
	R	$3, 3$	$0, 0$

en forma normal. Este juego no posee un sub-juego propio. Luego, el ENEP es $\{(R, a), (L, b)\}$. Esto resulta en el EPS $\left\{\left(\frac{1}{2}RX + \frac{1}{2}RY, \frac{1}{2}la + \frac{1}{2}ra\right), \left(\frac{1}{2}LX + \frac{1}{2}LY, \frac{1}{2}lb + \frac{1}{2}rb\right)\right\}$, lo que es equivalente a decir que el EPS es $\left\{\left[\left(L, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right), \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) b\right)\right], \left[\left(R, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right), \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) a\right)\right]\right\}$. Adicionalmente, el juego reducido posee otro EN, en el cual el Jugador 1 pone igual probabilidad en L y R, y el Jugador 2 pone igual peso en a y b, también descrito como $\left\{\left(\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right), \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)\right\}$; encontrando el tercer EPS del juego.

Importante: Notar que las estrategias de EPS están escritas de la siguiente forma manera,

$$\left\{\left(\sigma_1^{t=1}, \sigma_1^{t=3}\right), \left(\sigma_{2,1}^{t=2} \times \sigma_{2,2}^{t=2}\right)\right\},$$

donde t simboliza la etapa del juego en que está ubicado el jugador respectivo; los subíndices indican a los jugadores; y si además estos últimos poseen un decimal, hacen alusión al sub-juego en que se encuentra ubicado el jugador en el t indicado.

Nota:

- *Para identificar los sub-juegos lo pudieron haber hecho: encerrándolos en un círculo o escribiéndolos, cinco (5) puntos por cada sub-juego reconocido.*
- *Para encontrar los EN (EPS) se pide que explicíten la estrategia usada en cada sub-juego (mejor respuesta o EIEED) con el fin de obtener puntaje completo. Cinco (5) puntos por esto.*
- *Por encontrar los EPS se tienen 15 puntos.*
- *Por formalizar la escritura de los EPS se tienen cinco (5) puntos.*

P3. (30 puntos) **(Negociación de Sueldo)** Un trabajador, Pablo, busca un trabajo que dura un solo año.[1] Él está negociando su sueldo con la firma A. La productividad de Pablo para la firma A es 10, es decir, si la firma A paga un sueldo igual a w a Pablo, la firma A obtendrá un excedente de $10 - w$ por contratar a Pablo.

Pablo, antes de empezar a negociar con firma A, ya tiene una oferta de otra firma B. La firma B ofrece un sueldo de 6 a Pablo. El sueldo, o de firma A o de firma B, es para un periodo y Pablo va a trabajar sólo un año en su vida y puede trabajar sólo para una firma.

Pablo y la firma A inician la negociación: Pueden negociar por un máximo de cuatro años. En el primer periodo (año) Pablo sugiere que le paguen w_1. Si la firma A lo acepta, Pablo trabaja en la firma A el primer año con sueldo w_1. Si la firma A lo rechaza, en el segundo periodo la firma A ofrece un sueldo de w_2 a Pablo. Si Pablo lo acepta, trabaja en la firma A en el segundo año con sueldo w_2. Si Pablo lo rechaza, tiene dos opciones; puede ir a trabajar en la firma B en periodo 2 con un sueldo de 6 o puede seguir negociando con la firma A. Si Pablo sigue negociando, sugiere a la firma A que le paguen w_3. Si la firma A lo acepta, Pablo trabajará en la firma A durante el tercer año con sueldo w_3. Si la firma A lo rechaza, en el cuatro año la firma A ofrece un sueldo de w_4 a Pablo. Si Pablo lo acepta, trabaja en la firma A en el cuarto año con sueldo w_4. Si Pablo lo rechaza, trabaja en la firma B durante el cuarto año con un sueldo de 6.

Tanto Pablo como la firma A son impacientes y usan el mismo factor $\delta < 1$ para descontar los futuros pagos, es decir un pago de x mañana vale δx hoy y un pago de x pasado mañana vale $\delta^2 x$ hoy.

Calculen el equilibrio en sub-juego perfecto de la negociación entre Pablo y la firma A.

Respuesta: Consideremos el juego con las siguientes etapas:

- En $t = 0, 2$, Pedro ofrece.
- En $t = 1, 3$ la empresa A ofrece.

Realicemos IHA:

- Consideremos $t = 3$. Pablo obtendrá w si él acepta el trabjo en la firma A, 6 si el acepta el trabajo en la firma B. Luego el debe escoger:

$$s_{A,3} = \begin{cases} \text{Firma } A & , \text{ si } w \geq 6, \\ \text{Firma } B & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

  Dado esto, la firma A recibe 0 si $w < 6$ y $10 - w$ si $w \geq 6$. Por lo tanto, debe escoger $w_3 = 6$.

- Considere $t = 2$. La firma A recibirá $10 - w$ si esta acepta una oferta w de Pedro y $10 - w_3$ al siguiente año si este la rechaza. Por lo tanto, la firma A debe aceptar ssi

$$(10 - w) \geq \delta(10 - w_3) \Leftrightarrow w \leq 10(1 - \delta) + \delta 6.$$

  La mejor respuesta de pedro será ofertar:

$$w_2 = 10(1 - \delta) + 6\delta.$$

[1] Tome un año como un solo periodo, el cual es discreto.

- Considere $t = 1$.[2] Considere la decisión de Pedro. Pedro recibirá w si acepta la oferta de la empresa A, 6 si acepta la oferta de la empresa B, y δw_2 si rechaza y continua. Uno debe verificar si él prefiere la oferta de la empresa B por sobre continuar. Notemos que

$$r > \delta w_2 = 10\delta(1-\delta) + 6\delta^2 \Leftrightarrow r > \frac{10\delta(1-\delta)}{1-\delta^2} = \frac{10\delta}{1+\delta}.$$

  Desde que $6 > \frac{10}{2} > \frac{10\delta}{1+\delta}$, esto implica que $6 > \delta w_2$. **Se debe dejar constancia que se hizo este cálculo para tener puntaje completo.**

  Lo anterior es que, Pedro prefiere la oferta de la firma B por sobre continuar, y por ende él nunca rechazará la oferta y continuará. Por último, el debe escoger:

$$s_{A,1} = s_{A,3} = \begin{cases} \text{Firma } A & , \text{ si } w \geq 6, \\ \text{Firma } B & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

- Considere $t = 0$. Debe ser obvio a estas alturas que estamos en una situación similar a $t = 2$. Luego, la firma A acepta ssi $w \leq w_2$ y Pedro ofrece

$$w_0 = w_2 = 10(1-\delta) + 6\delta.$$

Nota:

- *Cada ítem t vale seis (6) puntos, salvo cuando $t = 1$. Este último vale 12 puntos (donde seis puntos deben ser contabilizados si el alumno pone la restricción adicional de preferir la oferta de la firma B por sobre continuar la negociación.*
- *Los t pueden ser distintos, por ejemplo:*
  - *En $t = 1, 3$, Pedro ofrece.*
  - *En $t = 2, 4$ la empresa A ofrece.*

  Se considera que respeten la estructura del juego.

[2] Aquí se define el juego, en el sentido que es la etapa más importante dadas las restricciones que se deben imponer.