IN3202 Microeconomía
Otoño 2015

Profesor: J. Escobar, R. Ilkilic

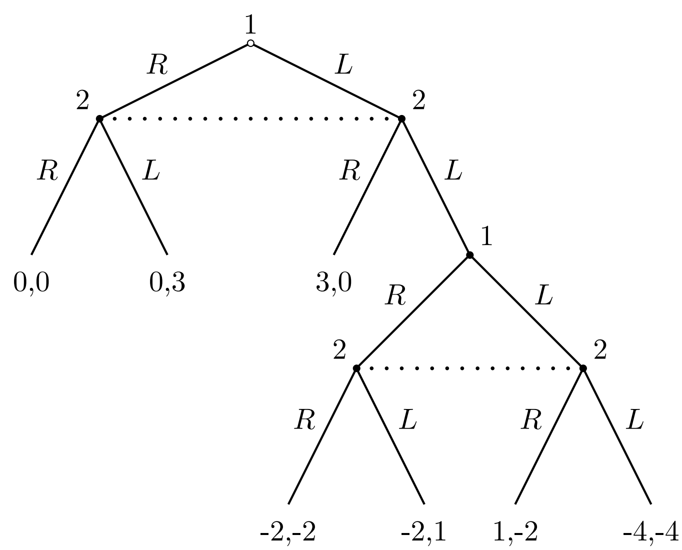
Control 2

1. Considere el siguiente guerra de desgaste de dos periodos. Hay dos jugadores, jugador 1 y jugador 2, que en cada periodo tienen que elegir simultáneamente entre luchar o renunciar. En el primer periodo, si algún jugador renuncia, el juego acaba y no continua al segundo periodo. Si ambos renuncian, ambos reciben un pago igual a 0. Si uno renuncia y el otro lucha, él que renuncia recibe 0 y él que lucha recibe 3. Si ambos luchan en el primer periodo, ambos reciben -2 y el juego continua al segundo periodo. En el segundo periodo, si ambos renuncian, reciben un pago igual a 0 en este periodo. Si uno renuncia y el otro lucha, él que renuncia recibe 0 y él que lucha recibe 3 en este periodo. Si ambos luchan, ambos reciben -2 en este periodo.

   El pago total de cada jugador es la suma de los pagos recibidos en ambos periodos.

   a. (6pts) Dibuje el árbol de decisión del juego

   El árbol del juego corresponde a



   b. (6pts) Identifique los subjuegos del juego

   Existen dos subjuegos, ambos parten en el nodo en que el jugador[1] 1 decide. El primero es el juego en si, y el segundo es donde el jugador 1 vuelve a decidir si luchar o no.

[1]En verdad depende de como el estudiante haya modelado el juego. Si decidió que 2 comenzara y el modelamiento es similar también debiera estar correcto. Lo importante es que haya encerrado en un circulo o identificado los 2 subjuegos

c. (18pts) Encuentre los equilibrios perfectos en subjuegos.

Para encontrar los EPS escribimos los pagos del periodo 1 y 2 de la forma

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & R & L \\ \hline
R & 0,0 & 0,3 \\ \hline
L & 3,0 & c,c \\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|}
 & R & L \\ \hline
R & -2,-2 & -2,1 \\ \hline
L & 1,-2 & -4,-4 \\ \hline
\end{array}$$

Periodo 1 Periodo 2

En donde c es el pago de continuar el juego, el cual debe ser encontrado. Si se resuelve la matriz de pagos del periodo 2 se llega a que existen dos EN. Estos son $\text{EN}_1 = (L,R)$ y $\text{EN}_2 = (R,L)$ con pagos $(1,-2)$ y $(-2,1)$ respectivamente.

(8pts)

Ahora, vemos cuales son los EN del primer periodo en caso de que se juegue el EN_1 o el EN_2. Si tomamos el EN_1, en el periodo 1 se tendrá solo un EN igual al perfil (L,R). Si tomamos el EN_2 se tendrá, al igual que antes, solo un EN igual al perfil (R,L). Por lo que los EPS son

$$\text{EPS}_1 = (\sigma_1 = (L,L)\ ,\ \sigma_2 = (R,R))$$

$$\text{EPS}_2 = (\sigma_1 = (R,R)\ ,\ \sigma_2 = (L,L))$$

En donde la estrategia se define como $\sigma_i = (\underbrace{s_i}_{\text{Acción en el periodo 1}}, \underbrace{s_i}_{\text{Acción en el periodo 2}})$ (10pts)

2. Dos firmas deciden simultáneamente precios en un mercado de productos diferenciados. Dados los precios $p_1, p_2 \geq 0$, la firma i tiene una demanda $D_i(p_i, p_{-i}) = (1 - p_i + \alpha p_{-i})$, con $0 < \alpha < 1$. La demanda que cada firma enfrenta es decreciente en su precio p_i y creciente en el precio del rival p_{-i}. Los costos de producción son iguales a 0. De este modo, las utilidades de la firma i son

$$u_i(p_i, p_{-i}) = (1 - p_i + \alpha p_{-i})p_i.$$

a. (10pts) Encuentre un equilibria de Nash.

Para encontrar el EN basta con encontrar la función de mejor respuesta de cada firma y su punto de interseccin.

Cada firma resuelve:

$$max\{p_i(1 - p_i + \alpha p_{-i})\}$$

CPO:

$$1 - 2p_i + \alpha p_{-i} = 0$$

$$p_i = \frac{1 + \alpha p_{-i}}{2}$$

(3pts)

Dado que ambas firmas resuelven el mismo problema la intersección se encuentra cuando $p_i = p_{-i}$:

$$p^* = \frac{1}{2-\alpha}$$

(5pts)
Luego el EN $= \{\frac{1}{2-\alpha}, \frac{1}{2-\alpha}\}$.
(2pts)

b. (5pts) Encuentre los precios (p_1, p_2) que maximizan la suma de las utilidades de ambas firmas, es decir, encuentre el perfil de precios que maximiza

$$(1 - p_1 + \alpha p_2)p_1 + (1 - p_2 + \alpha p_1)p_2.$$

El perfil de precios se encuentra a través de CPO:

$$U_{p_1} = 1 - 1p_1 + \alpha p_2 + \alpha p_2 = 0$$
$$p_1 = \frac{1 + 2\alpha p_2}{2}$$

(2p) Como ambos jugadores enfrentan el mismo problema se tendrá $p_1 = p_2$ luego:

$$p = \frac{1}{2(1-\alpha)}$$

Por lo que el perfil de precios será:

$$(p_1 = \frac{1}{2(1-\alpha)}, p_2 = \frac{1}{2(1-\alpha)})$$

(3p)

c. (15pts) Suponga que el juego es infinitamente repetido con factor de descuento $\delta < 1$. Encuentre condiciones bajo δ de modo que el perfil de precios encontrado en b puede alcanzarse como equilibrio colusivo del juego infinitamente repetido. Como dependen esas condiciones de α?
Primero es necesario caracterizar la utilidad de colusión π^{col}, la utilidad de desvio π^{dv} y la utilidad de castigo π^{cast}:
La primera esta dada por la situación planteada en b.

$$\pi^{col} = \frac{1}{4(1-\alpha)}$$

(1 pts)
La utilidad de desvio ser la mejor respuesta del jugador i ante el jugador $-i$ que juega el precio de colusión, entonces el jugador i resuelve:

$$max\{p_i(1 - p_i + \alpha\frac{1}{2(1-\alpha)})\}$$

Resolviendo a través de CPO se obtiene:

$$p_i^* = \frac{2-\alpha}{4(1-\alpha)}$$

Por lo que la utilidad de desvio ser:

$$\pi^{dv} = \frac{(2-\alpha)^2}{(4(1-\alpha))^2}$$

(5 pts)
La utilidad de castigo est dada por el EN encontrado en a.

$$\pi^{cast} = \frac{1}{(2-\alpha)^2}$$

(1 pts)
Luego el perfil de precios ser EPS si:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi^{col} \geq \pi^{dv} + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \pi^{cast}$$

(3pts)
Es decir:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \frac{1}{4(1-\alpha)} \geq \frac{(2-\alpha)^2}{(4(1-\alpha))^2} + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \frac{1}{(2-\alpha)^2}$$

$$\frac{1}{1-\delta} \frac{1}{4(1-\alpha)} \geq \frac{(2-\alpha)^2}{(4(1-\alpha))^2} + \frac{\delta}{1-\delta} \frac{1}{(2-\alpha)^2}$$

$$\frac{1}{4(1-\alpha)} \geq (1-\delta) \frac{(2-\alpha)^2}{(4(1-\alpha))^2} + \delta \frac{1}{(2-\alpha)^2}$$

Despejando δ :

$$\delta \geq \frac{\dfrac{(2-\alpha)^2}{(4(1-\alpha))^2} - \dfrac{1}{4(1-\alpha)}}{\dfrac{(2-\alpha)^2}{(4(1-\alpha))^2} - \dfrac{1}{(2-\alpha)^2}}$$

(3pts)
Basta notar que: $\dfrac{1}{4(1-\alpha)} \geq \dfrac{1}{(2-\alpha)^2}$ para mostrar que existe un EPS con $\delta < 1$.
(2pts)

3. Considere una licitación primer precio con extorsión. Los dos participantes tienen valoraciones independientes t_i uniformes en $[0,1]$. Los participantes ofertan, y la mayor oferta obtiene el bien. Sin embargo, existe una probabilidad $(1-\alpha)$ de que el vendedor exija un pago total de t_i al ganador. De este modo, si el ganador i ofertó b_i, el pago esperado que efectivamente realizará es $\alpha b_i + (1-\alpha)t_i$. En este problema, encontraremos un equilibrio Bayesiano simétrico $\sigma^*(t)$ que es estrictamente creciente y diferenciable.

   a. (10pts) Dada una estrategia $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$ del jugador 2, encuentre la utilidad esperada del jugador, dado su tipo $t_1 \in [0,1]$, y su oferta $b_1 \in \mathbb{R}_+$.

   La utilidad esperada es

   $$\mathbb{E}[u_i(b_i,\sigma_j)] = (t_i - (\alpha b_i + (1-\alpha)t_i))\,\mathbb{P}(\sigma_j(t_j) < b_i) + \frac{t_i - (\alpha b_i + (1-\alpha)t_i)}{2}\mathbb{P}(\sigma_j(t_j) = b_i)$$

   b. (20pts) Encuentre un equilibrio Bayesiano simétrico del juego.

   Para encontrar el EB buscamos b_i tal que maximize $\mathbb{E}[u_i(b_i,\sigma_j)]$. Entonces

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{E}[u_i(b_i,\sigma_j)] &= (t_i - (\alpha b_i + (1-\alpha)t_i))\,\mathbb{P}(\sigma_j(t_j) < b_i) + \frac{t_i - (\alpha b_i + (1-\alpha)t_i)}{2}\underbrace{\mathbb{P}(\sigma_j(t_j) = b_i)}_{0} \\
   &= (t_i - (\alpha b_i + (1-\alpha)t_i))\,\mathbb{P}(t_j < \sigma_j^{-1}(b_i)) \\
   &= (t_i - (\alpha b_i + (1-\alpha)t_i))\,\sigma_j^{-1}(b_i)
   \end{aligned}$$

   Derivamos con respecto a b_i

   $$\text{CPO:} \quad -\alpha\sigma_j^{-1}(b_i) + \tfrac{1}{\sigma_j'(\sigma^{-1}(b_i))}(t_i - (\alpha b_i + (1-\alpha)t_i)) \quad = 0$$

   (10pts)
   Imponemos simetría, por lo que $\sigma_i = \sigma_j$

   $$\begin{aligned}
   -\alpha t_i + \frac{1}{\sigma_i'(t_i)}(t_i - (\alpha b_i + (1-\alpha)t_i)) &= 0 \\
   -\alpha t_i \sigma_i'(t_i) + t_i - \alpha\sigma_i(t_i) - (1-\alpha)t_i &= 0 \\
   \alpha\underbrace{(t_i\sigma_i'(t_i) + \sigma_i(t_i))}_{\frac{d(\sigma_i(t_i)t_i)}{dt_i}} &= t_i\alpha \quad / \cdot dt_i \\
   \alpha d(\sigma_i(t_i)t_i) &= \alpha t_i dt_i \quad / \int(\cdot) \\
   \sigma_i(t_i)t_i &= \frac{t_i^2}{2} + c
   \end{aligned}$$

   Tenemos la condición $\sigma_i(0) = 0 \implies c = 0$, por lo que el equilibrio Bayesiano simétrico es

   $$\text{EB} = \left(\sigma_i(t_i) = \frac{t_i}{2} \quad \forall i \in \{1,2\}\right)$$

   (10pts)