IN3202 Microeconomía
Primavera 2011

Profesor: J. Escobar
Auxiliares: O. Aravena y C. Lizama

Control 2

Tiempo: 75 minutos

1. (50pts) Considere un conjunto $\{1, \ldots, N\}$, con $N \geq 3$, de amigos que juegan el siguiente juego de favores. En cada $t \in \{1, \ldots, N\}$, el jugador t decide si hacerle o no un favor al jugador $t+1$ (si $t = N$ entonces el jugador N decide si hacerle o no un favor al jugador 1). De este modo, el conjunto de acciones del jugador que mueve en la ronda t es $\{F, NF\}$ (F si hace favor, NF si no lo hace). El costo de hacer el favor es igual a $c > 0$ para el habitante t, pero el habitante $t + 1$ (o 1 si $t = N$) que recibe el favor tiene un beneficio igual a $v > 0$. Los amigos descuentan pagos a tasa $\delta < 1$. Por ejemplo, si todos los amigos hacen favores el vector de pagos es

$$(-c + \delta^{N-1}v, (v - \delta c), \delta(v - \delta c), \ldots, \delta^{N-2}(v - \delta c))$$

si el jugador 1 es el único que hace el favor el vector de pagos es $(-c, v, 0, \ldots, 0)$ y si sólo N hace el favor los pagos son $(\delta^{N-1}v, 0, \ldots, 0, -\delta^{N-1}c)$. El juego es de información perfecta. Suponemos que $v - \delta c > 0$.

   a. (10pts) Describa el conjunto de estrategias de cada jugador.

   b. (5pts) Calcule todas las soluciones de inducción reversa.

   c. (10pts) Sea $\sigma = (\sigma_i)_i$ un perfil de estrategias. Defina $h^\sigma \in \{F, NF\}^N$ como la historia que resulta una vez que el juego se ha jugado con los jugadores usando la estretagia σ. Muestre que si σ es un EN, entonces $h^\sigma = (NF, \ldots, NF)$.

   d. (5pts) Sólo en esta parte, suponga que $N = 3$. Muestre que existe un EN que no es EPS.

   e. (15pts) Suponga ahora que el juego es infinitamente repetido de modo que en cada $t \geq 1$ de la forma $t = nN + m$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $m = m(t) \in \{1, \ldots N\}$, el jugador m decide si hacerle o no un favor al jugador $m + 1$ (si $m = N$ el favor se lo hace al jugador 1). Muestre que si

$$(v - \delta c)\frac{\delta^N}{1 - \delta^N} \geq \delta c$$

   entonces existe un EPS del juego en el que en cada ronda t el resultado es que el jugador $m(t)$ hace el favor. Explique cuidadosamente las estrategias de equilibrio y verifique los incentivos después de cada posible historia. En particular, detalle el trade off que enfrenta cada jugador al momento de decidir si hace o no un favor.

   f. (5pts) Explique por qué es más difícil que haya cooperación cuando N crece.

Solución:

   a. El conjunto de estrategias de cada jugador es una función que a cada posible historia ocurrida le asigna una acción $\{F, NF\}$. Es decir, la estrategia del jugador t es una función

$$\begin{aligned} \sigma: \quad \{F, NF\}^{t-1} &\longrightarrow \{F, NF\} \\ h^t &\longrightarrow \sigma(h^t) \in \{F, NF\} \end{aligned}$$

   que a cada historia le asocia una accion in $\{F, NF\}$.

b. Independiente de la historia en que el jugador $t = N$ este, si el jugador N decide hacerle el favor al jugador 1 solo tiene costo (y ningún beneficio). Si no lo hace se ahorra dicho costo comparado a no hacer el favor. Notar que esto es independiente de la historia previa de favores. Lo mismo ocurre para $t = N-1$, y así sucesivamente. De esa manera, la única solución de inducción reversa es NF para todos los jugadores, independiente de la historia que ocurra. Más formalmente, la única solución por inducción reversa es el perfil $\sigma = (\sigma_i)_{i=1,\ldots,N}$ donde $\sigma_i(h) = NF$ para todo $h \in \{F, NF\}^{i-1}$-

c. Sea σ un EN y supongamos que alguna componente de h^σ es igual a F. Sea t^* el último jugador que hace el favor. Si $t^* \geq 2$, entonces hacer un favor sólo tiene costos para el jugador t^* (pues la decisión de hacerle o no el favor al jugador t^* se toma previa a la acción de t^*). Si $t^* = 1$, entonces sólo $t^* = 1$ está haciendo el favor. Sin embargo, $t^* = 1$ puede desviarse no haciendo el favor y, de este modo, se ahora el costo de hacer el favor y, en el peor de los casos, el jugador N seguirá sin hacerle el favor (en el mejor, el jugador N terminará haciendole el favor al jugador 1). En cualquier caso, el jugador 1 está estricamente mejor no hacuendo el favor. Se sigue que σ no es un EN.

d. El siguiente perfil de estrategias es EN pero no es EPS.

   σ_1: nunca hace favor.
   σ_2: hace el favor si jugador 1 hace el favor.
   σ_3: nunca hace el favor.

   Es fácil verificar que no existen desvíos unilaterales profitables.
   Si 1 se desvía y hace un favor, entonces recibe el costo de hacer el favor y ningún beneficio, pues la estrategia de 3 es no hacer el favor independiente de la historia.
   Si 2 se desvía y hace el favor cuando 1 no lo hace, entonces incurre el costo del favor y no tiene beneficios. Desviarse no haciendo el favor cuando 1 hace el favor, deja indiferente a 2. Hacer el favor siempre lo deja peor dada la estrategia de 1 y nunca hacer el favor lo deja indiferente.
   Si 3 se desvía haciendo el favor después de alguna historia, solo incurre el costo.

   Este perfil de estrategias es EN (no hay desvíos profitables) pero no es EPS (en el EPS ningún jugador realiza un favor independiente de la historia, en este perfil el jugador 2 realiza el favor condicionando a que 1 lo haga).

e. Consideremos la siguiente estrategias gatillo σ_i para i: *hacer el favor en* t *con* $m(t) = i$ *si* $t = 1$ *o en todas las rondas previas todos los jugadores han hecho el favor; en caso contrario no hacer el favor.*

   Verifiquemos que $\sigma = (\sigma_i)$ es EPS. Si el jugador i debe jugar después de una historia donde alguien no hizo el favor, entonces independiente de su jugada, en lo que sigue del juego nadie hará favores. Se sigue que para i es óptimo no hacer un favor.

   Consideremos ahora el problema del jugador 1 decidiendo en $t = 1$. Si hace el favor incurre un costo c, pero dadas las estrategias de continuación, obtiene un pago futuro igual a la suma de los beneficios por favores recibidos en las rondas del tipo nN, con $n \in \mathbb{N}$, menos los costos incurridos en las rondas subsecuentes. Tal pago de continuacion es igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta^{nN-1}(v - \delta c)$$

   Si no hace el favor, nadie más hara favores y su pago de continuación es 0. Luego, estará en el interés de 1 seguir la estrategia ssi

$$\begin{aligned} -c + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{nN-1}(v - \delta c) &\geq 0 \\ (v - \delta c)\left(\frac{\delta^N}{1-\delta^N}\right) &\geq \delta c \end{aligned}$$

Observamos que el tradeoff que enfrenta 1 es ahorrarse el costo de hacerse el favor pero perder beneficions futuros de recibir y hacer favores, versus hacer ek favor y mantener la relación entre los amigos funcionando.

Finalmente, cuando algún otro jugador i esta jugando en una ronda t (con $t = m(t)$) en la que sólo han habido favores, entonces su problema de decidir si hacer o no el favor es igual al del jugador 1 en $t = 1$.

Se sigue que las estrategias de gatillo son un EPS ssi $(v - \delta c)\left(\frac{\delta^N}{1-\delta^N}\right) \geq \delta c$. Claramente, además, el resultado del juego es que en cada ronda se realiza el favor.

f. Si N crece, entonces el beneficio de recibir el favor se recibe mucho más tarde en el juego. Como los beneficios futuros se descuentan, entones el valor de un favor recibido es menor y por lo tanto hay menos incentivos a hacer favores.

2. (25pts) Dos candidatos presidenciales deciden simultáneamente el gasto en sus campañas $g_i \geq 0$. Cada candidato i valora la presidencia en $v_i \in [0, 1]$. Las valoraciones son independientemente distribuidas de acuerdo a una función de probabilidad acumulada $F(x) = x^2$. Cada candidato i conoce su valoración v_i, pero no la de su rival. Gana la presidencia el candidato con mayor gasto en su campaña, pero los gastos incurridos no son recuperables (por ejemplo, los afiches distribuidos tienen un valor igual a 0 después de la elección).

   a. (5pts) Modele el juego como un juego Bayesiano. Describa las estrategias de cada jugador.
   b. (10pts) Encuentre un equilibrio Bayesiano simétrico del juego.
   c. (10pts) Un legislador cree que el gasto en campañas presidenciales es demasiado alto. Para solucionar esto, sugiere que el estado financie la campaña del candidato perdedor de modo tal que el perdedor no sufra financieramente con la campaña. Solucionará esto el problema? Explique los efectos que puede tener la propuesta del legislador.

Solución:

a. El juego queda descrito de la siguiente manera:
Jugadores: 1,2
Acciones: $A_i = [0, \infty[\ \forall t_i\ \forall i$
Tipos: $T_i = [0, 1] \forall i$
Distribución de tipos: $g(x, y) = f(x)f(y) = 2x2y = 4xy$
Pagos:

$$u_i(v_i, g_i, g_j; v_i) = \begin{cases} v_i - g_i & \text{si } g_i > g_j \\ -g_i & \text{si } g_i < g_j \\ \frac{v_i}{2} - g_i & \text{si } g_i = g_j \end{cases}$$

b. Sea $\beta(\cdot)$ la estrategia en un equilibrio Bayesiano simétrico. Suponemos que β es creciente y diferenciable. En equilibrio, la utilidad esperada del jugador i dado su tipo v_i y dado su gasto es

$$
\begin{aligned}
U_i(g_i, v_i; \beta) &= (v_i - g_i)P(g_i > g_j) - g_i P(g_i < g_j) \\
&= v_i P(g_i > g_j) - g_i \\
&= v_i P(g_i > \beta(v_j)) - g_i \\
&= v_i P(\beta^{-1}(g_i) > v_j) - g_i \\
&= v_i F(\beta^{-1}(g_i)) - g_i
\end{aligned}
$$

Tomando la CPO con respecto a g_i tenemos:

$$v_i \frac{f(\beta^{-1}(g_i))}{\beta'[\beta^{-1}(g_i)]} - 1 = 0$$

Ya que el equilibrio es simétrico, $\beta^{-1}(g_i) = v_i$

$$v_i f(v_i) = \beta'(v_i)$$

donde $f(v_i) = 2v_i$.
Integrando y reemplazando, tenemos:

$$\beta(v_i) = \frac{2}{3} v_i^3 + C$$

Pero $\beta(0) = 0$, por lo que

$$\beta(v_i) = \frac{2}{3} v_i^3$$

c. En este problema no es necesario resolver. Sí se debe notar que el cambio en el financiamiento va a producir un cambio en los incentivos y los candidatos terminarán haciendo campañas más agresivas (mayor gasto). En el nuevo esquema de financiamiento el perdedor no pagará, pero el ganador gastará en promedio mucho más. De hecho, como lo sugiere el resultado de equivalencia de ingresos visto en clases para licitaciones, es esperable que el gasto total esperado de los dos candidatos sea exactamente el mismo con y sin financiamiento de los perdedores.

Se puede ser más formal (aunque no es necesario) y notar que en el nuevo juego, los pagos son

$$u_i(v_i, g_i, g_j; v_i) = \begin{cases} v_i - g_i & \text{si } \; g_i > g_j \\ 0 & \text{si } \; g_i < g_j \\ \frac{v_i - g_i}{2} & \text{si } \; g_i = g_j \end{cases}$$

Las estrategias ede equilibrio son

$$\beta(v_i) = \frac{2}{3} v_i$$

El gasto total en la parte b es

$$2 \cdot E[g_i] = 2 \cdot \int_0^1 \frac{2}{3} v_i^3 2 v_i dv_i = \frac{8}{15}$$

que es igual al gasto total en la parte c.
En efecto, considerando que la distribución del máximo de las valoraciones es $v = \max\{v_1, v_2\}$ entonces $v \sim F(v_i)^2$ y densidad $f_m(v) = 4v_i^3$, el gasto total se calcula como:

$$E[max\{\beta_1, \beta_2\}] = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} v_i\right) 4 v_i^3 = \frac{8}{15}$$