IN3202 Microeconomía — Profesor: Juan Escobar, Rahmi Ilkilic

Otoño 2017 — Auxiliares: B. Gomez, B. Olea, G. Rojas

Control 2

Tiempo: 90 minutos

P1. (30pts) Use sus conocimientos de teoría de juegos y no más de 8 renglones para responder cada una de las siguientes preguntas. Su respuesta no será evaluada si excede el límite o está escrita con letra ilegible.

a. (15pts) Usted participa en una licitación segundo precio por un bien que valora en 20. Secretamente, a usted se le han revelado todas las ofertas de sus competidores. Las ofertas de sus competidores son 10, 15, y 12. Debiese usted ofertar $p = 20$ en esta licitación?
Respuesta: En la subasta segundo precio, la estrategia de ofertar la propia valoración domina debilmente a las demás estrategias (y así para todos los jugadores). En este caso, ofertar $p = 20$, dada la información que se tiene, sí es una buena estrategia pues obtiene una utilidad de 5 y se asegura de ganar la subasta. De hecho, si se ofreciera $p \in [16, 17, 18, 19]$ obtendría la misma utilidad igual a 5 y también ganaría la subasta.

b. (15pts) Según El Arte de la Estrategia, que significa esta frase: Si no le gusta al juego al que está jugando, busque un juego más grande.
Respuesta: El texto hace mención a la diferencia entre subastas ascendentes tradicionales por dos bienes (es decir, se subasta primero uno y luego de finalizar esa subasta, se puja por el otro) y las subastas de ofertas simultáneas (dónde los participantes pujan de manera simultánea por ambos bienes). La conclusión del caso nos indica que cuando se combinan dos juegos en uno, es posible emplear estrategias que sirven para los dos juegos, dónde la interacción entre múltiples juegos jugados simultáneamente hacen posible el castigo y la cooperación que, de no ser así, serían imposibles, al menos sin una colusión explícita.

P2. (25pts) Hay dos tiendas, A y B, que quieren vender un objeto. Cada tienda tiene un único objeto para vender. Tienda A vende al precio $p_A \in [0, 1]$ y tienda B al precio $p_B \in [0, 1]$.

Hay dos consumidores, C_1 y C_2, que cada uno quiere comprar sólo un objeto y valor del objeto a cada consumidor es 1. Es decir si un consumidor compra el objeto al precio p, el pago del consumidor es $1 - p$. Primero suponemos que los precios p_A y p_B son exógenos y dados p_A y p_B los consumidores simultáneamente deciden a qué tienda ir a hacer la compra. Un consumidor puede visitar sólo una tienda. Si a una tienda va un sólo consumidor, el consumidor compra el objeto al precio de la tienda. Si a una tienda van dos consumidores, el objeto se vende aleatoriamente a un consumidor o al otro, cada con probabilidad $\frac{1}{2}$. Si a una tienda no va ningún consumidor, la tienda no puede vender el objeto.

a. (5 puntos) Escriba la decisión de los consumidores como un juego en forma normal (juego simultáneo).
Respuesta: En este juego hay dos consumidores: C_1, C_2. Los precios de las firmas son exógenos, $p_i \in [0, 1]\ \forall i \in \{A, B\}$. Las estrategias disponibles para ambos consumidores son: $S_{C_1} = S_{C_2} = \{A, B\}$ **(1 Punto).** Finalmente, la matriz de pagos es como sigue **(4 Puntos)**:

C_1 \ C_2	A	B
A	$\frac{1-p_a}{2}, \frac{1-p_a}{2}$	$1 - p_a, 1 - p_b$
B	$1 - p_b, 1 - p_a$	$\frac{1-p_b}{2}, \frac{1-p_b}{2}$

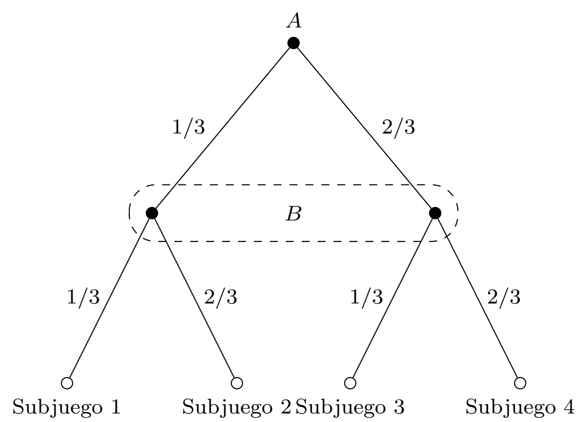
b. (5 puntos) Calcule todos los equilibrios Nash en estrategias puras del juego (como una función de los precios p_A y p_B).
Respuesta: (1) El par de estrategias $(s_{C_1} = A, s_{C_2} = A)$ es un EN en estrategias puras ssi $2p_b - p_a \geq 1$. **(1.5 Puntos)**

(2) El par de estrategias $(s_{C_1} = B, s_{C_2} = B)$ es un EN en estrategias puras ssi $2p_a - p_b \geq 1$. **(1.5 Puntos)**

(3) El par de estrategias $(s_{C_1} = B, s_{C_2} = A)$ y $(s_{C_1} = A, s_{C_2} = B)$ son EN en estrategias puras ssi $2p_b - p_a \leq 1 \bigwedge 2p_a - p_b \leq 1$ **(2 Puntos)**.

Ahora suponemos que hay dos períodos. En el período 1 las dos tiendas simultánemamente anuncian sus precios p_A y p_B pero tienen que anunciar un precio que es igual a o $\frac{1}{3}$ o $\frac{2}{3}$. Es decir cada tienda tiene dos estrategias $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$. Las tiendas intentan maximizar su beneficio. Si ningún consumidor viene a una tienda, el beneficio de la tienda es 0. Si al menos un consumidor va a una tienda, su beneficio es igual a su precio. Dados los precios anunciados en el período 1, en el período 2 los consumidores simultánemamente eligen a qué tienda ir.

c. (5 puntos) Escriba las decisiones de las tiendas y los consumidores como un juego secuencial con información imperfecta.
Respuesta: En el primer período, las firmas enfrentan el siguiente juego de información imperfecta **(2 Puntos)**:



Luego, en el segundo período y dependiendo de las decisiones de las firmas en $t = 1$, se jugará alguno de los 4 subjuegos detallados en el juego en forma extensiva anterior. Cada subjuego depende de los precios fijados por las firmas de la siguiente forma y son equivalentes a la matriz de pagos detallada en el inciso a. (solo que ahora se debe reemplazar los valores de p_i). Es decir, ahora los consumidores deben poseer una estrategia para cada contingencia (Subjuego).

Por lo tanto, el espacio de estrategias posibles para cada consumidor en este juego corresponde a **(3 Puntos)**:

$$S_{C_1} = S_{C_2} = \{A, B\} \times \{A, B\} \times \{A, B\} \times \{A, B\}$$

d. (10 puntos) Encuentre dos equilibrios perfectos en subjuegos en estrategias puras del juego tal que en un EPS tenemos $p_A = \frac{1}{3}$ y en el otro EPS tenemos $p_A = \frac{2}{3}$. (PISTA: Este juego tiene al menos 40 EPS en estrategias puras. Le pedimos sólo dos EPS con precios diferentes en la tienda A. Por favor, no escriban más que dos EPS. Al corregir, se va a considerar sólo los primerios dos EPS escritas.)
Respuesta: Resolviendo por inducción reversa el juego en forma extensiva, en primer lugar obtenemos los EN de cada uno de los 4 subjuegos detallados en c.

i Cuando $p_a = \frac{1}{3}$ y $p_b = \frac{1}{3}$, los EN del Subjuego 1 son: $\{(B, A), (A, B)\}$ **(1 Punto)**.

ii Cuando $p_a = \frac{1}{3}$ y $p_b = \frac{2}{3}$, los EN del Subjuego 2 son: $\{(A, A), (B, A), (A, B)\}$ **(1 Punto)**.

iii Cuando $p_a = \frac{2}{3}$ y $p_b = \frac{1}{3}$, los EN del Subjuego 3 son: $\{(A, B), (B, A), (B, B)\}$ **(1 Punto)**.

iv Cuando $p_a = \frac{2}{3}$ y $p_b = \frac{2}{3}$, los EN del Subjuego 4 son: $\{(A, B), (B, A)\}$ **(1 Punto)**.

Finalmente los EPS corresponden a estrategias contingentes que formen un Equilibrio de Nash en cada subjuego. (Existen al menos 40!). A modo de ejemplo, se detallan 8 distintos EPS del juego **(3 Puntos c/u)**: [1]

$$EPS_1 = \{p_a = \tfrac{1}{3}, p_b = \tfrac{1}{3}, s_{C_1} = \{B, A, A, A\}, s_{C_2} = \{A, A, B, B\}\}$$

$$EPS_2 = \{p_a = \tfrac{2}{3}, p_b = \tfrac{1}{3}, s_{C_1} = \{B, A, A, A\}, s_{C_2} = \{A, A, B, B\}\}$$

[1] Se deben escribir de manera correcta, es decir, una estrategia para cada contingencia.

$$EPS_3 = \{p_a = \tfrac{1}{3}, p_b = \tfrac{1}{3}, s_{C_1} = \{A, B, B, A\}, s_{C_2} = \{B, A, B, B\}\}$$
$$EPS_4 = \{p_a = \tfrac{2}{3}, p_b = \tfrac{1}{3}, s_{C_1} = \{A, A, B, B\}, s_{C_2} = \{B, A, B, A\}\}$$
$$EPS_5 = \{p_a = \tfrac{2}{3}, p_b = \tfrac{2}{3}, s_{C_1} = \{B, A, B, A\}, s_{C_2} = \{A, A, B, B\}\}$$
$$EPS_6 = \{p_a = \tfrac{2}{3}, p_b = \tfrac{2}{3}, s_{C_1} = \{A, A, B, A\}, s_{C_2} = \{B, A, B, B\}\}$$
$$EPS_7 = \{p_a = \tfrac{2}{3}, p_b = \tfrac{2}{3}, s_{C_1} = \{B, A, B, B\}, s_{C_2} = \{A, A, B, A\}\}$$
$$EPS_8 = \{p_a = \tfrac{2}{3}, p_b = \tfrac{2}{3}, s_{C_1} = \{B, A, B, B\}, s_{C_2} = \{A, B, A, A\}\}$$

P3. (35pts) Dos firmas fijan precios $p_i \geq 0$, $i = 1, 2$, simultáneamente. Un consumidor demanda una unidad del bien, pero su valor de reserva es igual a v. Cada firma tiene costo marginal igual a $c \in [0, v[$. El consumidor compra de la firma que fija el menor precio (y decide lanzando una moneda equilibrada en caso de indiferencia). El factor de descuento de la firma i es $\delta_i \in]0, 1[$, con $\delta_1 \geq \delta_2$. El juego se repite indefinidamente, y la historia de precios previos en el juego es obervada perfectamente.

a. (10pts) Encuentre una condición necesaria y suficiente para un equilibrio en estrategias gatillo en que ambas firmas fijan el precio monopólico en cada ronda $t \geq 1$ (simpre y cuando no hayan desvios). Discuta los incentivos en cada historia del juego.
Respuesta: Las utilidades de las firmas son de la siguiente forma:

$$u(p_i, p_j) = \begin{cases} (p_i - c) & si \quad p_i \leq p_j \\ \frac{(p_i - c)}{2} & si \quad p_i = p_j \\ 0 & si \quad p_i \geq p_j \end{cases}$$

Se sabe que el EN en esta competencia a la Bertrand corresponde a $p_i = p_j = c$, pues ninguna firma tiene incentivos a cambiar su precio (desvío) y obtener una mayor utilidad. Ahora, si la firma i fuese un monopolio, ésta fijará un precio igual a la máxima disposición a pagar del único consumidor en esta economía, es decir, $p_i = v$. Desde ahora en adelante, llamaremos $\Pi_M = (v - c)$ y $\Pi_{cast} = (c - c) = 0$ a la utilidad monopólica y de castigo (EN) respectivamente. Dónde la utilidad de ambas firmas en cooperación corresponde a $\Pi_{coop} = \frac{\Pi_M}{2}$.**(2 Puntos)**

Usando estrategias gatillo para cualquier $t \geq 1$, el problema al que se enfrenta cada firma corresponde a: **(2 Puntos)**

$$\begin{aligned} VP_{colusion} &\geq VP_{desvio} \\ \sum_{j=0}^{\infty} \delta_i^j \Pi_{coop} &\geq \Pi_{desvio} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_i^j \Pi_{cast} \\ \sum_{j=0}^{\infty} \delta_i^j \frac{\Pi_M}{2} &\geq \Pi_M \end{aligned}$$

La utilidad de desvío corresponde a la utilidad monopólica (pues el rival baja el precio un ε pequeño, quedándose con toda la demanda). Calculando las sumas (recordemos que $\delta_i \in (0, 1)$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \delta_i} \frac{\Pi_M}{2} &\geq \Pi_M \\ \delta_i &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el EPS con estrategias gatillo se tiene ssi $\min(\delta_1, \delta_2) \geq \frac{1}{2}$ **(6 Puntos)**

b. (10pts) Encuentre una condición necesaria y suficiente para un equilibrio en estrategias de castigo de largo 1 en que ambas firmas fijan el precio monopólico en cada ronda $t \geq 1$ (simpre y cuando no hayan desvios). Discuta los incentivos en cada

historia del juego.
Respuesta: Para que se mantenga el acuerdo colusivo, dada la estrategia de largo 1, debe cumplirse que **(3 Puntos)**:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \delta_i^j \Pi_{coop} \geq \Pi_{desvio} + 0 \cdot \delta_i + \sum_{j=2}^{\infty} \delta_i^j \Pi_{coop}$$

Dónde $\sum_{j=2}^{\infty} \delta_i^j = \frac{\delta_i^2}{1-\delta}$. Reemplazando cada utilidad correspondiente y resolviendo la inecuación para δ_i se obtiene: **(4 Puntos)**

$$\sum_{j=0}^{\infty} \delta_i^j \frac{\Pi_M}{2} \geq \Pi_M + 0 \cdot \delta_i + \frac{\delta_i^2}{2(1-\delta_i)}$$

$$0 \geq (\delta_i - 1)^2$$

Lo anterior solo se cumple cuando $\delta_i = 1$, por lo tanto, no se puede sostener la colusión pues recordemos que el factor de descuento debe ser menor estricto que la unidad. Ahora, veamos si existen desvíos en el camino del castigo: (1) Durante la ronda de castigo, no existen incentivos al desvío, pues se juega el EN. (2) Para los períodos siguientes, se vuelve a tener el mismo caso estudiado, lo cual se verificó que nunca se sostiene. Por lo tanto, no es posible mantener la colusión con un castigo de largo 1. **(3 Puntos)**

c. (15pts) Suponga que $\delta_1 > 1/2 > \delta_2$. Nos interesa un equilibrio tal que, si no hay desviaciones, en las rondas impares ambas firmas fijan precios monopólico, pero en las rondas pares la firma 2 es la única que vende (a precio monopólico también). Describa las correspondientes estrategias gatillo y encuentre una condición necesaria y suficiente para que la estrategia sea un EPS. Explique la utilidad de estas estrategias en comparación a la estrategias gatillo usadas en a. HINT: Al verificar incentivos distinga entre rondas pares e impares.
Respuesta: Utilizando el Hint, verificamos primero los incentivos al desvío en un t impar (recordemos que las firmas utilizan estrategias gatillo). Para la firma 1 debe cumplirse que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \delta_1^{2j} \frac{\Pi_M}{2} \geq \Pi_M + 0 \cdot \delta_1 + 0 \cdot \delta_1^2 + \dots$$

Reemplazando la solución de la suma $\sum_{j=0}^{\infty} \delta_1^{2j} = \frac{1}{1-\delta_1^2}$, se obtiene **(2 Puntos)**:

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_M}{2(1-\delta_1^2)} \geq & \Pi_M + 0 \\ \delta_1^2 \geq & \frac{1}{2} \\ \delta_1 \geq & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Para la firma 2 se tiene:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \delta_1^{2j} \frac{\Pi_M}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} \delta_1^{2j+1} \Pi_M \geq \Pi_M + 0 \cdot \delta_1 + 0 \cdot \delta_1^2 + \dots$$

Reemplazando la solución de la suma $\sum_{j=0}^{\infty} \delta_2^{2j+1} = \frac{\delta}{1-\delta_2^2}$, se obtiene: **(3 Puntos)**

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(1-\delta_2^2)} + \frac{\delta}{1-\delta_2^2} \geq & 1 \\ 2\delta_2^2 + 2\delta - 1 \geq & 0 \\ \delta_2 \geq & \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

Verificamos ahora los incentivos al desvío en un t par. Para la firma 1 **(3 Puntos)**:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\delta_1^{2j+1}\frac{\Pi_M}{2} &\geq \Pi_M + 0\cdot\delta_1 + 0\cdot\delta_1^2 + \dots\\ \frac{\delta_1}{2(1-\delta_1^2)} &\geq 1\\ 2\delta_1^2 + \delta_1 - 2 &\geq 0\\ \delta_1 &\geq \frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)\end{aligned}$$

Ahora, nuevamente para la firma 2: **(2 Puntos)**

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\delta_2^{2j}\Pi_M + \sum_{j=0}^{\infty}\delta_2^{2j+1}\frac{\Pi_M}{2} &\geq \Pi_M + 0\cdot\delta_1 + 0\cdot\delta_1^2 + \dots\\ \frac{1}{1-\delta_2^2} + \frac{\delta_1}{2(1-\delta_2^2)} &\geq 1\\ \delta_2 &\geq -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Lo cual es obvio, pues en este caso a la firma 2 nunca le conviene desviarse!.

La condición necesaria y suficiente para que la estrategia sea EPS es: $\delta_1 \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \wedge \delta_2 \geq \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ **(3 Puntos)**. Podemos observar que la utilidad de la firma 1 en este caso es menor que en la parte a, pues solo obtiene la renta de cooperación en los turnos impares, es por esta razón que se le exige un valor mayor a δ_1 para que la estrategia sea un EPS. Las rentas de la firma 2 en este caso son mayores, pues obtiene rentas monopólicas en los turnos pares y la utilidad de cooperación en turnos impares; además, que la firma 2 sea el monopolio en algunos períodos hace que tenga mayores incentivos a coludirse y por eso su factor crítico es menor: $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ **(2 Puntos)**. Como se pide resolver el problema mediante estrategias gatillo, es claro que no existen incentivos al desvío en el castigo, pues las firmas juegan $p_i = c$, el EN.