IN3202 Microeconomía — Profesor: J. Escobar, R. Ilkilic

Primavera 2016 — Auxiliares: B. Olea, J. Palma

Pauta P1

P1. (30 puntos) **(Estabilidad Evolutiva)** Considere el juego donde $R, C > 0$

	H	D	B
H	$\frac{1}{2}(R-C), \frac{1}{2}(R-C)$	$R, 0$	$R, 0$
D	$0, R$	$\frac{1}{2}R, \frac{1}{2}R$	0,R
B	$0, R$	$R, 0$	$\frac{1}{2}R, \frac{1}{2}R$

a. (10 puntos) Para $R > C$ encuentre el equilibrio Nash simétrico y demuestre que es evolutivamente estable.
Solución:
Para la condición $R > C$, se puede ver mediante intersección de mejores respuestas que el único EN (Y además simétrico) es el par **(H,H)**.

Para mostrar si **H** es EEE tenemos:

$$\boxed{\pi(H,H) > \pi(D,H)}$$

Por tanto, **H** vs la población D es evolutivamente estable.

Además debe cumplirse:

$$\boxed{\pi(H,H) > \pi(B,H)}$$

Entonces, **H** vs la población B también es evolutivamente estable, por lo que se concluye que **H** es EEE.

b. (20 puntos) Para $R < C$ encuentre los equilibrios Nash simétricos y demuestre que son evolutivamente estables. [Pista: Hay solo dos EN simétricos, ambos en estrategias mixtas.]
Solución:
Debemos calcular el ENEM, por lo que usaremos el método de indiferencia para el jugador 1, denotando la estrategia mixta del jugador 2 como: $\sigma_2 = \{p, q, (1-p-q)\}$, así obtenemos:

$$\boxed{\pi_1(H,\sigma_2) = \pi_1(D,\sigma_2) = \pi_1(B,\sigma_2)}$$

De $\pi_1(D,\sigma_2) = \pi_1(B,\sigma_2)$:

$$\frac{1}{2}Rq = Rq + (1-p-q)\frac{1}{2}R$$

$$\frac{1}{2}Rp = \frac{1}{2}R$$

$$\boxed{p = 1}$$

Lo que sería un caso límite de la Estrategia Mixta (juega puras el jugador 2), por tanto como $\sigma_2 = \{p, q, (1-p-q)\}$ no nos sirve, se sugiere la estrategia: $\sigma_2' = \{(p, 0, (1-p)\}$, así se tiene:

$$\boxed{\pi_1(H,\sigma_2') = \pi_1(D,\sigma_2') = \pi_1(B,\sigma_2')}$$

De $\pi_1(H,\sigma_2') = \pi_1(D,\sigma_2')$:

$$\tfrac{1}{2}(R-C)p+\frac{1}{2}(1-p)R=0$$
$$Rp-Cp+R-Rp=0$$
$$\boxed{p=\frac{R}{C}}$$

Lo que implica que $(1-p)=(1-\frac{R}{C})$

Por lo tanto, el **ENEM** simétrico es igual a:

$$\textbf{ENEM}=\{(\tfrac{R}{C},0,(1-\tfrac{R}{C})),(\tfrac{R}{C},0,(1-\tfrac{R}{C}))\}$$

Ahora debemos mostrar que la estrategia mixta $\sigma^{'}=(\frac{R}{C},0,(1-\frac{R}{C}))$ encontrada es evolutivamente estable contra cualquier otra estrategia invasora de la forma $\sigma^{''}=(a,b,(1-a-b)$, por lo que se tiene para un x suficientemente pequeño:

$$\boxed{(1-x)\pi(\sigma^{'},\sigma^{'})+x\pi(\sigma^{'},\sigma^{''})>(1-x)\pi(\sigma^{''},\sigma^{'})+x\pi(\sigma^{''},\sigma^{''})}$$

Como $x\to 0$, debe cumplirse $\pi(\sigma^{'},\sigma^{'})>\pi(\sigma^{''},\sigma^{'})$ y $\sigma^{'}$ sería EEE, veamos si se cumple entonces:

$$\pi(\sigma^{'},\sigma^{'})=\frac{1}{2}R-\frac{1}{2}\frac{R^2}{C}$$
$$\pi(\sigma^{''},\sigma^{'})=\frac{1}{2}R-\frac{1}{2}\frac{R^2}{C}-\frac{1}{2}\frac{R^2b}{C}-\frac{1}{2}Rb$$

Se tiene que cumplir entonces:

$$\frac{1}{2}R-\frac{1}{2}\frac{R^2}{C}>\frac{1}{2}R-\frac{1}{2}\frac{R^2}{C}-\frac{1}{2}\frac{R^2b}{C}-\frac{1}{2}Rb$$
$$\boxed{-R[b(1-\tfrac{R}{C})]<0}$$

Lo cual siempre es cierto, excepto cuando $b=0$. Luego, tenemos que comprobar para $b=0$ que se cumpla la otra condición $\pi(\sigma^{'},\sigma^{''})>\pi(\sigma^{''},\sigma^{''})$, en la cual ahora la estrategia mixta "invasora" tiene la forma $\sigma^{''}=(a,0,(1-a))$, ya que queremos probarlo para $b=0$.
Calculando cada utilidad obtenemos:

$$\pi(\sigma^{'},\sigma^{''})=-Ra+\frac{1}{2}\frac{R^2}{C}+\frac{1}{2}R$$
$$\pi(\sigma^{''},\sigma^{''})=-\frac{1}{2}Ca^2+\frac{1}{2}R$$

Se debe cumplir entonces:

$$-Ra+\frac{1}{2}\frac{R^2}{C}+\frac{1}{2}R>-\frac{1}{2}Ca^2+\frac{1}{2}R$$
$$-Ra+\frac{1}{2}\frac{R^2}{C}>-\frac{1}{2}Ca^2 \quad /\cdot 2C$$
$$-2CRa+R^2>-C^2a^2$$
$$C^2a^2-2CRa+R^2>0$$
$$\boxed{(Ca-R)^2>0}$$

La cual es siempre verdadero, por lo tanto $\boxed{\sigma^{'}=(\frac{R}{C},0,(1-\frac{R}{C}))}$ encontrado es EEE. Ahora, como el problema es un juego simétrico, se obtiene que el segundo ENEM simétrico $\boxed{\sigma^{*}=(\frac{R}{C},(1-\frac{R}{C}),0)}$ también es EEE.