

**Examen**  
Tiempo: 135 minutos

P1. (30 puntos) (**Estabilidad Evolutiva**) Considere el juego donde  $R, C > 0$

	$H$	$D$	$B$
$H$	$\frac{1}{2}(R - C), \frac{1}{2}(R - C)$	$R, 0$	$R, 0$
$D$	$0, R$	$\frac{1}{2}R, \frac{1}{2}R$	$0, R$
$B$	$0, R$	$R, 0$	$\frac{1}{2}R, \frac{1}{2}R$

- a. (10 puntos) Para  $R > C$  encuentre el equilibrio Nash simétrico y demuestre que es evolutivamente estable.
  - b. (20 puntos) Para  $R < C$  encuentre los equilibrios Nash simétricos y demuestre que son evolutivamente estables. [Pista: Hay solo dos EN simétricos, ambos en estrategias mixtas.]
- P2. (35 puntos) (**Competencia Cournot**) Hay tres firmas que producen el mismo producto con costo zero. Cada firma decide su cantidad de producción y compiten en un mercado con la demanda inversa  $p = 1 - (q_1 + q_2 + q_3)$ , donde  $q_i$  es la producción de la firma  $i$ .
- a. (10 puntos) Calcule el equilibrio (cantidades y precio) cuando las firmas deciden simultáneamente.
  - b. (25 puntos) Suponemos que primero la firma 1 decide su cantidad  $q_1$ . Después, observando  $q_1$ , las firmas 2 y 3 deciden sus cantidades simultáneamente. Calcule el equilibrio perfecto en subjugos.
- P3. (35 puntos) (**Juego de Coordinación**) Considere el siguiente juego entre Pedro (que escoge fila) y Juan (que escoge columna)

	$E$	$O$
$E$	$x, x$	$0, 0$
$O$	$0, 0$	$1, 1$

donde  $x > 0$ .

- a. (5 puntos) Calcule todos los ENEM (incluyendo los equilibrios en puras).
  - b. (10 puntos) Suponga que el juego se repite infinitamente en  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Cada jugador maximiza la suma descontada de los pagos del juego de etapa, con un factor de descuento  $\delta < 1$ . Encuentre  $\bar{\delta} \geq 0$ , tal que para todo  $\delta \geq \bar{\delta}$ , existe un EPS donde se juega  $(E, E)$  en cada ronda.
  - c. (5 puntos) Suponga que el juego se repite infinitamente. Cada jugador maximiza la suma descontada de los pagos del juego de etapa, con un factor de descuento  $\delta < 1$ . Muestre que existe  $\bar{\delta} \geq 0$ , tal que para todo  $\delta \geq \bar{\delta}$ , existe un EPS donde se juega  $(E, E)$  en cada ronda par y  $(O, O)$  en cada ronda impar.
  - d. (10pts) Suponga ahora que el juego se juega una sola vez. El valor de  $x$  es conocido por Pedro, pero no por Juan. Desde la perspectiva de Juan,  $x$  se distribuye de acuerdo a una distribución uniforme en  $[0, 1]$ . Encuentre el EB del juego. Son los EB eficientes? Explique.
  - e. (5pts) Como en la parte d, pero suponga ahora que desde la perspectiva de Juan,  $x$  se distribuye uniforme en  $[1, 2]$ . Encuentre el EB del juego. Son los EB eficientes? Explique.
- P4. (35puntos) (**Contratos y Riesgo Moral**) Un empleado puede hacer un esfuerzo  $e \geq 0$  a un costo  $\frac{c}{2}e^2$ . El esfuerzo produce un beneficio  $B(e) = e$  al empleador. Un contrato es una función  $w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  que especifica salarios en función del esfuerzo. El juego ocurre como sigue:

1. El empleador ofrece un contrato  $w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  al empleado.
  2. El empleado observa  $w$  y decide si acepta o no el contrato.
  3. Si no lo acepta, tanto el empleador como el empleado reciben 0.
  4. Si el empleador acepta el contrato, decide un esfuerzo  $e^* \geq 0$ . El empleador obtiene  $e^* - w(e^*)$  mientras que el empleado obtiene  $w(e^*) - \frac{c}{2}(e^*)^2$ .
- a. (10 puntos) Antes de resolver el juego descrito arriba, suponga que el empleador puede forzar al empleado a hacer cualquier nivel de esfuerzo  $e$  si éste acepta el contrato. En este caso, un contrato es una función de salarios  $w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  junto con una especificación de esfuerzo  $e^* \in \mathbb{R}_+$  que el empleado está forzado a hacer si acepta el contrato. Caracterice el contrato óptimo y muestre que el empleador especifica un nivel de esfuerzo  $e^* = 1/c$ .
  - b. (10pts) Plantee el problema de optimización que resuelve el empleador para encontrar el contrato que maximiza sus utilidades en el juego descrito arriba.
  - c. (10 puntos) Un contrato es lineal si es de la forma  $w(e) = a + be$ , donde  $a$  y  $b$  deben ser encontrados. Encuentre el contrato óptimo dentro de la clase de contratos lineales.
  - d. (5 puntos) Muestre que el contrato óptimo lineal encontrado en c es el contrato óptimo del empleador. Explique su resultado intuitivamente.