Pauta P4 Examen

P4. (35puntos) (**Contratos y Riesgo Moral**) Un empleado puede hacer un esfuerzo $e \geq 0$ a un costo $\frac{c}{2}e^2$. El esfuerzo produce un beneficio $B(e) = e$ al empleador. Un contrato es una función $w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ que especifica salarios en función del esfuerzo. El juego ocurre como sigue:

1. El empleador ofrece un contrato $w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ al empleado.
2. El empleado observa w y decide si acepta o no el contrato.
3. Si no lo acepta, tanto el empleador como el empleado reciben 0.
4. Si el empleador acepta el contrato, decide un esfuerzo $e^* \geq 0$. El empleador obtiene $e^* - w(e^*)$ mientras que el empleado obtiene $w(e^*) - \frac{c}{2}(e^*)^2$.

a. (10 puntos) Antes de resolver el juego descrito arriba, suponga que el empleador puede forzar al empleado a hacer cualquier nivel de esfuerzo e si éste acepta el contrato. En este caso, un contrato es una función de salarios $w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ junto con una especificación de esfuerzo $e^* \in \mathbb{R}_+$ que el empleado esta forzado a hacer si acepta el contrato. Caracterice el contrato óptimo y muestre que el empleador especifica un nivel de esfuerzo $e^* = 1/c$.
Solución:
El empleador se enfrenta al siguiente problema de optimización si es que puede forzar al empleado a hacer cualquier nivel de esfuerzo:

$$\max_{e^*, w(e^*)} \qquad e^* - w(e^*)$$

$$\text{s.t} \qquad w(e^*) - \frac{c}{2}(e^*)^2 \geq 0 \ \textbf{(R.P)}$$

Como puede forzarlo a hacer cualquier nivel de esfuerzo, la restricción de participación es activa (el empleador le dará justo lo necesario para que el empleado cumpla esta restricción). Por lo tanto tenemos:

$$w(e^*) - \frac{c}{2}(e^*)^2 = 0$$

$$w(e^*) = \frac{c}{2}(e^*)^2$$

Reemplazando en la función objetivo se tiene:

$$\max_{e^*} \ e^* - \frac{c}{2}(e^*)^2$$

Aplicando CPO:

$$1 - ce^* = 0$$

$$\boxed{e^* = \frac{1}{c}}$$

b. (10pts) Plantee el problema de optimización que resuelve el empleador para encontrar el contrato que maximiza sus utilidades en el juego descrito arriba.
Solución:
Como el esfuerzo es continuo, el problema de optimización queda como sigue:

$$\max_{e, w(e)} \qquad e - w(e)$$

$$\text{s.t} \qquad w(e) - \frac{c}{2}(e)^2 \geq 0 \ \textbf{(R.P)}$$

$$e = \text{arg max}_{\bar{e}} \quad w(e) - \frac{c}{2}(e)^2 \textbf{ (R.I)}$$

De la última restricción se tiene que $e = \dfrac{w'(e)}{c}$

c. (10 puntos) Un contrato es lineal si es de la forma $w(e) = a+be$, donde a y b deben ser encontrados. Encuentre el contrato óptimo dentro de la clase de contratos lineales.
Solución:
De la parte b se tiene que $e = \dfrac{w'(e)}{c} = \dfrac{b}{c}$, pues $w(e) = a + be$. Por lo que el problema de optimización queda de la forma:

$$\max_{a,b} \quad \frac{b}{c} - \frac{b^2}{c} - a$$

$$\text{s.t} \qquad a + \frac{b^2}{c} - \frac{b^2}{2c} \geq 0$$

Aplicando el Lagrangeano se tiene:

$$\mathcal{L}(a, b, \lambda) = \frac{b}{c} - \frac{b^2}{c} - a + \lambda[a + \frac{b^2}{2c}]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = -1 + \lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = \frac{1}{c} - \frac{2b}{c} + \frac{b\lambda}{c} = 0$$

Se tiene de esta ecuación lo siguiente, sabiendo que $\lambda = 1$

$$1 - 2b + b = 0$$

$$\boxed{b = 1}$$

De la última derivada (respecto a λ) obtenemos el valor de a.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = a + \frac{b^2}{c} - \frac{b^2}{2c} = 0$$

$$\boxed{a = -\frac{1}{2c}}$$

Finalmente el contrato lineal óptimo es igual a: $\boxed{w = \dfrac{1}{2c}}$

d. (5 puntos) Muestre que el contrato óptimo lineal encontrado en c es el contrato óptimo del empleador. Explique su resultado intuitivamente.
Solución:
Finalmente el empleador le dará un sueldo igual a la mitad del esfuerzo que el empleado realice, cosa de dejarlo indiferente y este trabaje para él. Las utilidades de este contrato lineal óptimo para el Principal es igual $\pi_{principal} = \dfrac{1}{2c}$, que es igual al sueldo entregado al Agente, dónde el esfuerzo óptimo es el mismo encontrado en la parte a).