IN3202 Microeconomía | Profesor: Juan Escobar
Primavera 2016 | Auxiliares: Valentina Contreras, Bastian Olea

Pauta P4

1. (40pts) La tabla siguiente muestra las probabilidades de que un Principal obtenga resultados diferentes en función del esfuerzo e realizado por un Agente.

	$x_1 = 10$	$x_2 = 50$
$e_1 = 0$	1/2	1/2
$e_2 = 4$	1/4	3/4

Las preferencias del principal y del agente están representadas, respectivamente, por las siguientes funciones de utilidad:

$$B(x, w) = (x - w)^{\frac{1}{2}}$$
$$U(w, e) = w - e$$

a. (10pts) Encuentre el contrato cuando el nivel de esfuerzo es observable y verificable. Como se comparte el riesgo? Explique.
Si el esfuerzo es bajo ($e = 0$), se tiene el siguiente problema de maximización:

$$\max_{w_0, w_1} \frac{1}{2}(10 - w_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(50 - w_1)^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{s.t} \qquad \frac{1}{2}w_0 + \frac{1}{2}w_1 \geq \underline{U} \text{ } \textbf{(R.P)}$$

Aplicando Lagrangeano se tiene:

$$\mathcal{L}(w_0, w_1, \lambda) = \frac{1}{2}(10 - w_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(50 - w_1)^{\frac{1}{2}} - \lambda[\frac{1}{2}w_0 + \frac{1}{2}w_1 - \underline{U}]$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_0} = -\frac{1}{4}(10 - w_0)^{-\frac{1}{2}} - \lambda\frac{1}{2} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_1} = -\frac{1}{4}(50 - w_1)^{-\frac{1}{2}} - \lambda\frac{1}{2} = 0$$

Por tanto se tiene que $\boxed{(10 - w_0) = (50 - w_1) = k}$, entonces de la restricción de participación (activa, pues si no lo estuviera, el Principal podría bajar ambos sueldo un poco hasta que ésta se cumpla con igualdad) se obtiene:

$$\frac{1}{2}w_0 + \frac{1}{2}w_1 = \underline{U}$$
$$\frac{1}{2}(10 - k) + \frac{1}{2}(50 - k) = \underline{U}$$
$$k = 30 - \underline{U}$$

Reemplazando se obtiene finalmente para w_0 y w_1:

$$w_0 = 10 - k = 10 - (30 - \underline{U}) = \boxed{\underline{U} - 20}$$
$$w_1 = 50 - k = 50 - (30 - \underline{U}) = \boxed{\underline{U} + 20}$$

Y la utilidad del principal es: $\boxed{(30 - \underline{U})^{\frac{1}{2}}}$

Ahora, si el esfuerzo es alto ($e = 4$), se tiene el siguiente problema de maximización:

$$\max_{w_0, w_1} \frac{1}{4}(10 - w_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}(50 - w_1)^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{s.t} \qquad \frac{1}{4}w_0 + \frac{3}{4}w_1 - 4 \geq \underline{U} \text{ } \textbf{(R.P)}$$

Aplicando Lagrangeano se tiene:

$$\mathcal{L}(w_0, w_1, \lambda) = \frac{1}{4}(10 - w_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}(50 - w_1)^{\frac{1}{2}} - \lambda[\frac{1}{4}w_0 + \frac{3}{4}w_1 - 4 - \underline{U}]$$

Usando el mismo procedimiento anterior, se tiene $\boxed{(10 - w_0) = (50 - w_1) = k}$ y la restricción de participación activa:

$$\frac{1}{4}w_0 + \frac{3}{4}w_1 = 4 + \underline{U}$$

$$\frac{1}{4}(10 - k) + \frac{3}{4}(50 - k) = 4 + \underline{U}$$

$$k = 36 - \underline{U}$$

Se obtiene que el contrato óptimo w_0, w_1 es:

$$w_0 = 10 - k = 10 - (36 - \underline{U}) = \boxed{\underline{U} - 26}$$

$$w_1 = 50 - k = 50 - (36 - \underline{U}) = \boxed{\underline{U} + 14}$$

Y la utilidad del principal es: $\boxed{(36 - \underline{U})^{\frac{1}{2}}}$

Se concluye que al Principal le conviene que el Agente se esfuerce, ya que:

$$(36 - \underline{U})^{\frac{1}{2}} > (30 - \underline{U})^{\frac{1}{2}}$$

Como el Agente es neutro al riesgo (función de utilidad lineal), este obtendrá sueldos distintos dependiendo del resultado que se obtenga. El Principal al ser averso al riesgo ($B''(x, w) < 0$, función cóncava) asegurará su utilidad independiente del resultado que se obtenga (Contrato de Franquicia).

b. (15pts) Plantee el problema de maximización cuando el esfuerzo es no observable y la utilidad de reserva del agente es $\underline{U}$.
Para inducir un esfuerzo bajo por parte del agente, se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\max_{w_0, w_1} \frac{1}{2}(10 - w_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(50 - w_1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{s.t} \qquad \frac{1}{2}w_0 + \frac{1}{2}w_1 \geq \underline{U} \ \textbf{(R.P)}$$

$$\frac{1}{2}w_0 + \frac{1}{2}w_1 \geq \frac{1}{4}w_0 + \frac{3}{4}w_1 - 4 \ \textbf{(R.I)}^1$$

Para el esfuerzo alto se tiene:

$$\max_{w_0, w_1} \frac{1}{4}(10 - w_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}(50 - w_1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{s.t} \qquad \frac{1}{4}w_0 + \frac{3}{4}w_1 - 4 \geq \underline{U} \ \textbf{(R.P)}$$

$$\frac{1}{4}w_0 + \frac{3}{4}w_1 - 4 \geq \frac{1}{2}w_0 + \frac{1}{2}w_1 \ \textbf{(R.I)}$$

c. (15pts) Encuentre el contrato óptimo para el caso planteado en b. Como se comparte el riesgo? Explique. Compare su respuesta con a.

Para el caso de esfuerzo alto, usando ambas restricciones activas (usando el mismo argumento de la parte a., se tiene un sistema de $2x2$:

$$\frac{1}{4}w_0 + \frac{3}{4}w_1 - 4 = \underline{U} \ \textbf{(R.P)}$$

$$\frac{1}{4}w_0 + \frac{3}{4}w_1 - 4 = \frac{1}{2}w_0 + \frac{1}{2}w_1 \ \textbf{(R.I)}$$

De la **(R.P)** activa se obtiene: $\boxed{w_1 = 16 + w_0}$
Reemplazando lo obtenido en la **(R.P)**, el contrato óptimo corresponde a:

$$\boxed{w_0 = \underline{U} - 8}$$

$$\boxed{w_0 = \underline{U} + 8}$$

[1] Restricción redundante, es decir, el contrato óptimo encontrado en la parte anterior para esfuerzo bajo es también solución de este problema de optimización.

Finalmente la utilidad del Principal corresponde a: $\Pi_{principal} = \frac{1}{4}(18 - \underline{U})^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}(44 - \underline{U})^{\frac{1}{2}}$.

Es decir, en presencia de información asimétrica (riesgo moral) ambos comparten el riesgo, a diferencia de la parte a donde el esfuerzo era observable y verificable.