FI3001-1 : Vibraciones y Ondas
Profesor: Simón Casassus M.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G.

Auxiliar 1: Mecánica Lagrangiana

Martes 20/03/18

1. La densidad lagrangiana que describe la hidrodinámica de un fluido irrotacional e ideal es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 - \rho e(\rho) + \phi\Big(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\Big)$$

donde ρ es la densidad de masa, $\vec{v}$ es el campo vectorial de velocidades del fluido, ϕ es el potencial de velocidades y $e(\rho)$ es la energía interna por unidad de masa.

a) Ocupando como coordenadas generalizadas $\vec{v}$, ρ y ϕ, varíe la acción y obtenga las ecuaciones de movimiento. Definiendo la presión como $P(\rho) = \rho^2\frac{\partial e}{\partial\rho}$, muestre que las ecuaciones de movimiento se reducen a la Ecuación de Continuidad y la Ecuación de Euler para un fluido.

b) Considere que el fluido está en estado estacionario y es uniforme, con densidad constante ρ_0 y presión constante P_0. Linealice las dos ecuaciones anteriores para una pequeña perturbación en la densidad y presión del fluido estacionario. Muestre que la dinámica resultante corresponde a un fenómeno ondulatorio. Utilice la variable $c^2 = \frac{\partial P}{\partial\rho}$ en su desarrollo. La perturbación anterior representa una onda de sonido; interprete el significado físico de c.

c) Encuentre la relación de dispersión de las ondas de sonido, $\omega(\vec{k})$.

2. **Propuesto:** La densidad lagrangiana de un campo electromagnético es:

$$\mathcal{L} = -\rho\phi + \vec{j}\cdot\vec{A} + \frac{\epsilon_0}{2}(\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2)$$

donde ρ es la densidad de carga, $\vec{j}$ es la densidad de corriente, ϕ es el potencial escalar, $\vec{A}$ el potencial vector, ϵ_0 la permitividad del vacío, c la velocidad de la luz, $\vec{E}$ el campo eléctrico y $\vec{B}$ el campo magnético. Ocupando como coordenadas generalizadas los potenciales ϕ y $\vec{A}$, muestre que variar respecto a ϕ resulta en la Ley de Gauss, y variar respecto a $\vec{A}$ resulta en la Ley de Ampère. Concluya que con este lagrangiano se obtienen como ecuaciones de movimiento las Ecuaciones de Maxwell (recuerde que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se pueden escribir como: $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ y $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$).