Solución:

Usando coordenadas cilíndricas centradas en el eje de simetría, podemos asumir que el campo eléctrico tiene la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}\,.$$

Como se trata de un material conductor, ya sabemos que

$$E(r) = 0 \qquad b < r < c\,.$$

Tomemos como superficie Gaussiana un cilindro de radio r y altura h. Entonces,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r h E(r)\,,$$

donde hemos usado que el flujo por las tapas del cilindro el cero ya que el campo es perpendicular al vector normal. Por otro lado, la carga encerrada por el cilindro Gaussiano depende del radio de éste. Si $r < a$ entonces

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho\, dV \\ &= \int_0^r dr' \int_0^{2\pi} r' d\phi' \int_0^h dz'\, \rho_0 \frac{a}{r'} \\ &= 2\pi\rho_0 r a h\,. \end{aligned}$$

Luego, por la Ley de Gauss,

$$E(r) = \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0}\,, \qquad r < a\,.$$

Cuando $a < r < b$ tenemos

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho\, dV \\ &= \int_0^a dr' \int_0^{2\pi} r' d\phi' \int_0^h dz'\, \rho_0 \frac{a}{r'} \\ &= 2\pi\rho_0 a^2 h\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E(r) = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0 r}\,, \qquad a < r < b\,.$$

Por último, para $r > c$ la carga encerrada es la misma que la anterior, ya que el conductor es neutro. Así,

$$E(r) = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0 r}\,, \qquad r > c\,.$$

Para calcular la densidad de carga inducida en las superficies del conductor invocamos nuevamente la Ley de Gauss, esta vez con un cilindro Gaussiano de radio $b < r < c$. Como el campo eléctrico es cero en esa región tenemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0\,.$$

La carga total encerrada por la superficie incluye la carga total del cilindro macizo, calculada anteriormente, y la carga inducida en la superficie $r = b$. Llamando σ_b a la densidad correspondiente tenemos

$$Q = 2\pi\rho_0 a^2 h + 2\pi\sigma_b b h\,.$$

Como esta carga debe anularse encontramos que

$$\sigma_b = -\rho_0 \frac{a^2}{b}\,.$$

La densidad de carga inducida en la superficie exterior debe ser tal que el conductor sea neutro. Es decir, tomando un cierto largo h del cilindro conductor, se debe cumplir que

$$2\pi\sigma_b b h + 2\pi\sigma_c c h = 0\,.$$

De esta relación deducimos

$$\begin{aligned}\sigma_c &= -\frac{b}{c}\sigma_b \\ &= \rho_0 \frac{a^2}{c}\,.\end{aligned}$$

a) Determine el valor de ρ_0 (Note que la función de distribución se hace nula en $r = 3a_0$, valor considerado como radio de este átomo).

b) Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio. Muestre que el electrón ubicado en el centro del átomo estaría en equilibrio en dicha posición.

c) Determine el potencial a una distancia r del electrón ($r < 3a_0$).

d) Suponga que el electrón sufre un pequeño desplazamiento respecto de su posición de equilibrio. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones ω con la cual el electrón oscilaría armónicamente.

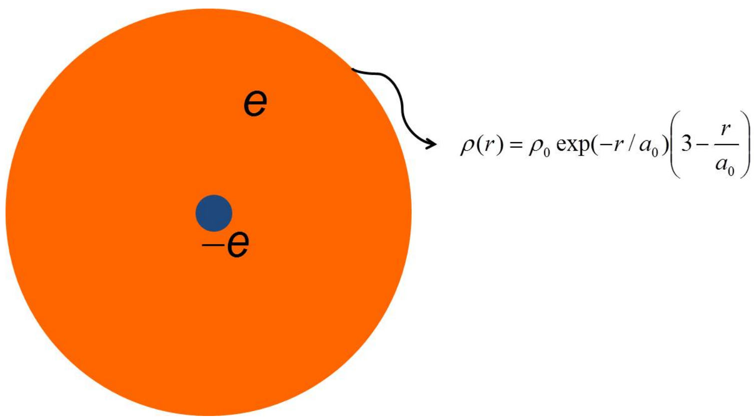


Figura 2: Modelo Atómico.

Resolución:

a) Para esta parte debemos integrar en todo el dominio del átomo $[0, 3a_0]$ pero ¿Qué integramos? La respuesta es la distribución de carga, para obtener la carga total, recordando que en este modelo tenemos una nube de carga positiva y un solo electrón de carga $-e$ en el centro, como el átomo es neutro, al integrar la distribución debemos obtener $+e$ y así "$-e + e = 0$".

$$Q_{nube} = \int \rho(r) dV = +e \tag{19}$$

Como tenemos un átomo en tres dimensiones integramos en un volumen y por simetria esférica, usamos estas coordenadas, con lo cual $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$.

$$+e = \int \rho_0 \exp(-r/a_0) \left(3 - \frac{r}{a_0}\right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \tag{20}$$

Trabajando un poco la expresión, sin integrarla aun y agregando los límites para una esfera completa:

$$+e = \rho_0 \cancelto{2\pi}{\int_0^{2\pi} d\phi} \cancelto{2}{\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta} \int_0^{R=3a_0} \exp(-r/a_0) \left(3r^2 - \frac{r^3}{a_0}\right) dr \tag{21}$$

Las primeras dos integrales en la ecuación (21) se trabajan mucho durante el curso y en conjunto tienen un valor de 4π. Sin embargo la última es más complicada y para resolverla hay que aplicar integración por partes tres veces, sin embargo si nos damos cuenta que al derivar $\exp(-r/a_0)r^3$ obtenemos justo la integral que queremos, simplificamos mucho el cálculo, esto lo podemos deducir al ver el número 3 acompaando a r^2, indicándonos que se ha bajado el grado, debido a una derivación. Evaluando la integral:

$$+e = 4\pi\rho_0(\exp(-3\cancel{a_0}/\cancel{a_0})(3a_0)^3 - \cancelto{0}{\exp(0/a_0)0}) \tag{22}$$

$$+e = 4\pi\rho_0 9a_0^3\exp(-3) = \frac{36\pi a_0^3}{e^3}\rho_0 \tag{23}$$

Finalmente obtenemos el valor de ρ_0:

$$\rho_0 = +e\frac{e^3}{36\pi a_0^3} \tag{24}$$

b) Para encontrar el campo eléctrico usaremos ley de Gauss, aprovechándonos de la simetria esférica.

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \tag{25}$$

Ahora podemos identificar dos sectores, los cuales son dentro y fuera del átomo *i.e.* para $r < 3a_0$ y $r > 3a_0$. Notemos que el lado izquierdo de la ecuacíon (25) permanece intacto en ambos casos, pues suponemos un campo radial ($\vec{E} = E(r)\hat{r}$) y usando el diferencial de superficie en coordenadas esféricas $d\vec{S} = r^2\sin(\theta)d\theta d\phi\hat{r} + r\sin(\theta)drd\phi\hat{\theta} + rdrd\theta\hat{\phi}$ tenemos que solo el término en $\hat{r}$ sobrevive en el producto punto:

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E(r)r^2\sin(\theta)d\theta d\phi = E(r)r^2\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta = 4\pi r^2 E(r) \tag{26}$$

Como no integramos en r no nos preocupamos si estamos dentro o fuera del átomo, por eso la parte izquierda siempre será la misma. Ahora si nos preguntamos por el lado derecho de la ecuación (25) tenemos que considerar casos, en el primero elegimos una superficie gaussiana consistente en una esfera de radio $r < 3a_0$, con lo cual tenemos que integrar la densidad de carga en un volumen:

$$Q(r) = \int_0^r \rho_0\exp\left(-r/a_0\right)\left(3 - \frac{r}{a_0}\right)r^2\sin\theta drd\theta d\phi \tag{27}$$

Esta integral es la misma que en la ecuación (20) de la parte a), como ya sabemos el resultado de la primitiva, se nos hace más fácil obtener el resultado:

$$Q(r) = 4\pi\rho_0(\exp(-r/a_0)r^3 - \cancelto{0}{\exp(0/a_0)0}) = 4\pi\rho_0\exp(-r/a_0)r^3 \tag{28}$$

Volviendo a la ecuación (25) y reemplazando las expresiones (26) y (28):

$$4\pi r^2E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}4\pi\rho_0\exp(-r/a_0)r^3 \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\exp(-r/a_0)r \tag{29}$$

Recordemos además que tenemos un electrón en el centro (carga puntual), por ende el campo total dentro del átomo es:

$$\vec{E}(r < 3a_0) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\exp(-r/a_0)r\hat{r} + \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} = +e\frac{e^3}{36\pi\varepsilon_0 a_0^3}\exp(-r/a_0)r\hat{r} + \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} \quad (30)$$

Para $r > 3a_0$ tenemos que la carga encerrada es cero, pues tenemos que el electrón que aporta carga $-e$ y la nube que tiene una carga total $+e$, por lo que al aplicar ley de Gauss, el campo total fuera del átomo será nulo:

$$\vec{E}(r > 3a_0) = 0 \quad (31)$$

Podemos demostrar que el electrón se encuentra en equilibrio en $r = 0$, pues si volvemos a la ecuación (30), observamos dos campos (el de la nube y el del electrón), sin considerar el campo del electrón, tenemos que el campo se anula en $r = 0$ y con esto una partícula no siente fuerza eléctrica, particularmente el electrón.

c) Para calcular el potencial en $r < 3a_0$ usamos la integral de camino:

$$V(r) - \cancelto{0}{V(\infty)} = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}\cdot\vec{dl} = -\left(\int_{\infty}^{3a_0}\cancelto{0}{\vec{E}}\cdot\vec{dl} + \int_{3a_0}^{r}\vec{E}\cdot\vec{dl}\right) \quad (32)$$

Consideramos que el potencial en infinito es cero, pues no tenemos una distribución infinita, además el campo en $r > 3a_0$ es nulo. Primero integraremos el campo de la ecuación (29), usando $\vec{dl} = dr\hat{r}$:

$$\int_{3a_0}^{r}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\exp(-r/a_0)rdr = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_{3a_0}^{r}\exp(-r/a_0)rdr = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(-a_0\exp(-r/a_0)(a_0+r)\right)\Big|_{3a_0}^{r} \quad (33)$$

Donde hemos integrado por partes, resolviendo:

$$\int_{3a_0}^{r}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\exp(-r/a_0)rdr = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(-a_0\exp(-r/a_0)(a_0+r) + 4a_0^2\exp(-3)\right) \quad (34)$$

Ahora debemos integrar el campo debido al electrón:

$$\int_{3a_0}^{r}\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{3a_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0}\left(-r^{-1}\right)\Big|_{3a_0}^{r} = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3a_0} - \frac{1}{r}\right) \quad (35)$$

Usando el principio de superposición y los resultados de (35) y (34) en (32):

$$V(r) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(-a_0\exp(-r/a_0)(a_0+r) + 4a_0^2\exp(-3)\right) - \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3a_0} - \frac{1}{r}\right) \quad (36)$$

$$V(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(a_0\exp(-r/a_0)(a_0+r) - 4a_0^2\exp(-3)\right) + e\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3a_0} - \frac{1}{r}\right) \quad (37)$$

Podemos reemplazar el valor de ρ_0, encontrado en a), en la expresión anterior, sin embargo no ayuda mucho en la simplificación de los resultados.

d) Para esta pregunta volveremos a retomar los resultados de la parte b), especialmente el campo debido a la nube, pues el electrón siente una fuerza dada por $\vec{F} = -e\vec{E}_{nube}$, como vimos en la posición central el campo se anula y no hay fuerza (punto de equilibrio) pero si movemos el electrón una distancia δ pequeño del origen el campo ya no será nulo, con lo que tenemos:

$$\vec{F}(\delta) = -e\vec{E}_{nube} = -e\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\exp(-\delta/a_0)\delta \tag{38}$$

Ahora si expandimos en serie de Taylor con respecto al punto de equilibrio ($r = 0$), tenemos de forma general:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ... \tag{39}$$

Donde $a = 0$ y $x = \delta$.

$$\exp(-\delta/a_0)\delta = \delta - \frac{\delta^2}{a} + ... \tag{40}$$

$$\vec{F}(\delta) = -e\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\delta - \frac{\delta^2}{a} + ...\right) = m_e\vec{a} = m_e\ddot{\delta} \tag{41}$$

Aproximando a primer orden:

$$-e\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\delta = m_e\ddot{\delta} \Rightarrow \ddot{\delta} + e\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 m_e}\delta \tag{42}$$

Reconociendo la ecuación armónica simple, podemos concluir que la frecuencia de pequeñas oscilaciones del electrón en torno al origen está dada por:

$$\omega^2 = +e\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 m_e} \tag{43}$$

3. **Conductores:** Una carga $+Q$ se encuentra distribuida en un alambre conductor de largo L y radio R_0 muy pequeño. Un cascarón cilíndrico conductor de largo L y carga $-Q$, cuyos radios interno y externo son R_1 y R_2, respectivamente, es ubicado simétricamente alrededor del alambre, como muestra la Figura 3. Teniendo en cuenta que $R_0 << R_1$ y $R_2 << L$:

   a) Calcule las densidades de carga superficiales en las capas internas y externas del cascarón, y también la densidad volumétrica dentro de éste.

   b) Determine el campo eléctrico en todo el espacio.

   c) Encuentre la diferencia de potencial entre el cascarón y el alambre.

   d) Calcule la capacitancia total del sistema y la energía almacenada en este último.

   Resolución:

   a) Para esta parte debemos recordar la propiedad principal de los conductores *i.e.* que dentro de un conductor el campo eléctrico es nulo, si no habría movimiento de cargas. Luego usaremos la Ley de Gauss con una superficie gaussiana cilíndrica de radio R, con

P21

a) Usemos que $C = \frac{q}{\Delta V}$

- para las placas, calculamos el campo:

Gauss

$$E\,2A = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Campo Doble

$$E = \frac{q}{2\varepsilon_0}\frac{1}{A} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{A}\hat{z}$$

$$\Delta V = \int_0^d E\,dz = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{d}{A}$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{\frac{\cancel{q}\,d}{\varepsilon_0 A}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

- para los cilindros

$$E\,2\pi r L = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{2\pi r\varepsilon_0}\frac{1}{L}$$

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi r\varepsilon_0}\frac{1}{L}\,dr = \frac{q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln(R_2/R_1)$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$$

- para las esferas

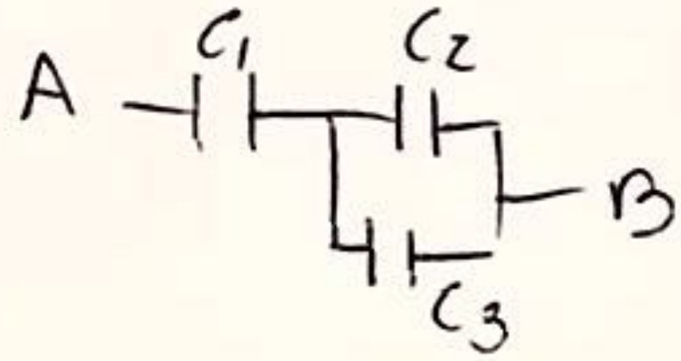
$$E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{1/R_1 - 1/R_2}$$

b)

$\Leftrightarrow$



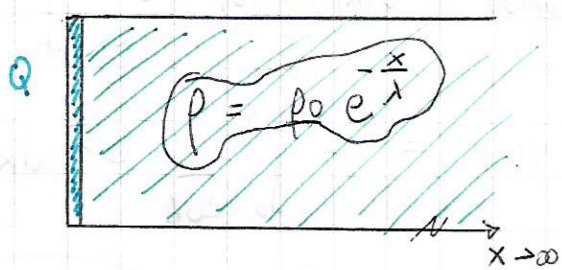
$$C_T = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} \right)^{-1}$$

... matroca

c)

$$C_T = \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_1 + C_2} \right)^{-1}$$

P4)



a) $$-Q = \int_{V} \rho \, dV \curvearrowright -Q = A \int_{0}^{+\infty} \rho_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

$$\Rightarrow \rho_0 = \frac{-Q}{A\lambda}$$

b) Usamos la ley de Gauss diferencial $\rightarrow$ $\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\varepsilon_0}$$

$$\int dE = \int \rho_0 \frac{e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\varepsilon_0} dx$$

$$\vec{E}(x) = -\frac{\rho_0 \lambda}{\varepsilon_0} e^{-\frac{x}{\lambda}} + C$$

Tomando $\lim_{x \to \infty} \vec{E}(x) \to 0$. $\Rightarrow$ $\boxed{C = 0}$

$$\vec{E}(x) = -\frac{\rho_0 \lambda}{\varepsilon_0} e^{-\frac{x}{\lambda}} = \boxed{\frac{Q}{\varepsilon_0 A} e^{-\frac{x}{\lambda}} \hat{x}}$$

c) Calculamos $V(x) - V(0) = -\int_0^x \vec{E} \cdot d\vec{x}$.

$$V(x) - V(0) = -\int_0^x \frac{Q}{\varepsilon_0 A} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

$$V(x) - V(0) = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \left(e^{-\frac{x}{\lambda}} - 1 \right)$$

d) $\mathcal{U} = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\forall} |E|^2 d\forall$.

$$\mathcal{U} = \frac{\varepsilon_0}{2} A \frac{Q^2}{\varepsilon_0^2 A^2} \int_0^\infty e^{-\frac{2x}{\lambda}} dx = \boxed{\frac{Q^2 \lambda}{4 \varepsilon_0 A}}$$

e) usaremos $\mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{2 \varepsilon_0 A}{\lambda}}$$