

P1 | Auxiliar 2

(a)

Se sabe por enunciado que $\vec{a} = \vec{v} \times \vec{\Omega}$ y por cátedra se sabe que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \vec{\Omega} \quad \Bigg| \cdot \vec{\Omega}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{\Omega})}{dt} = 0 \quad \Bigg| \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{\Omega} - \vec{v}_0 \cdot \vec{\Omega} = 0 \quad \Bigg| \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\Omega} = 0 \quad \Bigg| \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0} \rightarrow \text{Ecuaci n del plano}$$

  se concluye que el movimiento es plano.

(b)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \vec{\Omega} \quad \Bigg| \vec{v} \cdot$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad \Bigg| \frac{dv^2}{dt} = 2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = 0$$

  La rapidez es constante.

(c)

- Hay que calcular $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$ y ver la forma que tiene que tener $\vec{r}_0$ (que equivale a fijar el origen).

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\Omega} \quad \Bigg| \quad \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{r} \times \vec{\Omega} - \vec{r}_0 \times \vec{\Omega} \quad \Bigg| \cdot \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{r} = \vec{v}_0 \cdot \vec{r} + \cancel{\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{\Omega})}^0 - \vec{r} \cdot (\vec{r}_0 \times \vec{\Omega})$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot (\vec{v}_0 - \vec{r}_0 \times \vec{\Omega})$$

- Si se quiere $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$, entonces hay que imponer que se cumpla $\vec{v}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{\Omega} \quad \Bigg| \vec{\Omega} \times$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} \times \vec{v}_0 = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_0 \times \vec{\Omega})$$

- Usando que $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} \times \vec{v}_0 = \vec{r}_0 \Omega^2 - \vec{\Omega}(\vec{r}_0 \cdot \vec{\Omega})$$

- Imponiendo que $\vec{r}_0$ está en el plano del movimiento, se tiene que $\vec{r}_0 \cdot \vec{\Omega} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_0 = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{v}_0}{\Omega^2}}$$

(d)

• De cátedra se sabe que $\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$

• De la parte (c), se sabe que:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{r} \times \vec{\Omega} - \vec{r}_0 \times \vec{\Omega}$$

• Además se sabe que $\vec{v}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{\Omega}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \cancel{\vec{r}_0 \times \vec{\Omega}} + \vec{r} \times \vec{\Omega} - \cancel{\vec{r}_0 \times \vec{\Omega}} \quad / \quad \vec{r} \times$$

$$\Rightarrow \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega})$$

$$\Rightarrow \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{\Omega}) - \vec{\Omega} r^2$$

• Como se impuso en (c) que $\vec{r}_0$ vive en el plano del movimiento, y en la parte (a) se comprobó que el mov. ocurre en un solo plano, se cumple que

$$\vec{r} \cdot \vec{\Omega} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2} = -\vec{\Omega}}$$

P2 | Auxiliar 2

- Se sabe que la velocidad del perro es:

$\vec{r}_1$: pos. perro

$\vec{r}_2$: pos. auto

$\vec{u} \uparrow$

$$\dot{\vec{r}}_1 = v \cos \phi \hat{x} + v \sin \phi \hat{y}$$

$$\Rightarrow \tan \phi = \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1}$$



- Además, se sabe que el perro siempre mira al auto, lo que quiere decir que también se cumple

$$\tan \phi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Iguando ambas expresiones para $\tan \phi$:

$$\Rightarrow \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

- Como queremos encontrar la trayectoria del perro, debemos encontrar la función $y(x)$. Considerando eso, podemos usar regla de la cadena y obtener lo siguiente:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_1}{dt} \frac{dt}{dx_1}$$

- Reemplazando esa expresión en (1):

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Ahora, también sabemos que:

$$x_2 = 0$$

$$y_2 = ut$$

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 - ut}{x_1}$$

Definiendo $y_1' \equiv \frac{dy_1}{dx_1}$ y multiplicando por x_1 :

$$\Rightarrow y_1' x_1 - y_1 = -ut \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$$

$$\Rightarrow y_1'' x_1 + \cancel{y_1'} - \cancel{y_1'} = -u \frac{dt}{dx} \quad (2)$$

Esta última derivada se usa para aprovechar el hecho de que $\frac{ds}{dt} = v$, donde $s(t)$ es la distancia total recorrida por el perro, dada por: $s(t) = \int_0^t dt \sqrt{1 + f'(t)^2}$.

Si definimos $s(t)$ como una función de x en vez:

$$s(x) = \int_L^x dx \sqrt{1 + (y_1')^2}$$

se puede usar regla de la cadena:

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{dt} = v \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v} \frac{ds}{dx} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v} \sqrt{1 + (y_1')^2}$$

Reemplazando eso en (2):

$$\Rightarrow x_1 y_1'' = \frac{u}{v} \sqrt{1 + (y_1')^2} \quad / \quad \xi = y_1'$$

$$\Rightarrow \frac{\xi'}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{x_1} \quad / \quad \int_L^{x_1}$$

$$\Rightarrow \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{u}{v} \int_L^{x_1} \frac{dx_1}{x_1}$$

El signo da cuenta de que al disminuir x , aumenta s (o sea, de que se necesita que $\frac{ds}{dx} < 0$)

- La integral de la izquierda se resuelve usando el cambio de variable $\xi = \sinh(z)$ ya que se tiene que $\cosh^2(z) = 1 + \sinh^2(z)$ y así se puede sacar la raíz:

$$\int_0^{\xi} \frac{\cosh(z)}{\sqrt{\cosh^2(z)}} dz = \int_0^{\xi} dz = \xi = \operatorname{arcsinh}(\xi)$$

- Para calcular la función inversa del $\sinh(z)$ consideremos su forma exponencial:

$$\xi = \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad | \cdot 2e^z$$

$$\Rightarrow 2\xi e^z = e^{2z} - 1$$

$$\Rightarrow (e^z)^2 - 2\xi e^z - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^z = \xi + \sqrt{\xi^2 + 1}$$

$$\Rightarrow z = \operatorname{arcsinh}(\xi) = \log(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1})$$

- Así, se tiene que

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \log(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1})$$

(recordar que $\xi = y_1'$)

- Resolviendo la integral de la derecha y reemplazando la integral que acabamos de calcular:

$$\log(y_1' + \sqrt{1 + (y_1')^2}) = \log\left[\left(\frac{x_1}{L}\right)^{u/v}\right]$$

$$\Rightarrow y_1' + \sqrt{1 + (y_1')^2} = \left(\frac{x}{L}\right)^{u/v}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + (y')^2} = \left(\frac{x}{L}\right)^{u/2} - y' \quad | \quad ()^2$$

$$\Rightarrow 1 + \cancel{(y')^2} = \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{2u}{2}} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{u}{2}} y' + \cancel{(y')^2}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{u}{2}} y' = \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{2u}{2}} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{u}{2}} - \left(\frac{x}{L}\right)^{-\frac{u}{2}} \right] \quad | \quad \int_L^x dx$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{L}{1 + \frac{u}{2}} \left(\frac{x}{L}\right)^{1 + \frac{u}{2}} - \frac{L}{1 - \frac{u}{2}} \left(\frac{x}{L}\right)^{1 - \frac{u}{2}} \right]$$