

EXAMEN-PAUTA

P1 a) Un sistema es conservativo si su energía es constante $\frac{dE}{dt} = 0$. Un SRNI es no inercial porque está rotando o acelerando, por lo tanto se le está inyectando energía al SRNI para que este pueda acelerar. Como se le inyecta energía al SRNI, este no puede satisfacer $\frac{dE}{dt} = 0$, por lo tanto desde este sistema la energía no se conserva.

b) La energía potencial del sistema es $U(r) = \frac{k}{2} r^2$

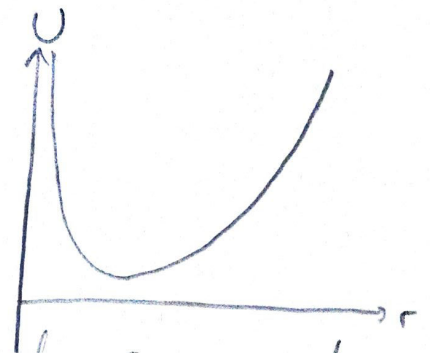
El potencial es central $\Rightarrow \vec{L} = m \vec{r}_0 \times \vec{v}_0$ conservado

$$E = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} r_0^2 \quad \text{conservado}$$

Si $\vec{r}_0 \parallel \vec{v}_0$, entonces $L = 0$ y el movimiento es el de un oscilador armónico sobre la recta dada por $\vec{r}_0$.

Si $L \neq 0$ el movimiento es en un plano, y tenemos un potencial efectivo $U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{2} r^2$

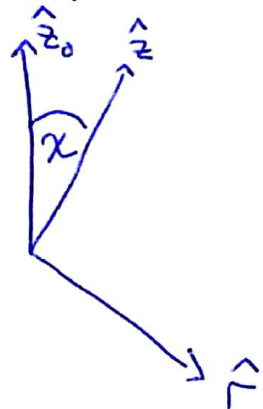
A partir del gráfico vemos que la masa solo puede tener energías positivas, y sus órbitas siempre tendrán una distancia de mínimo y de máximo acercamiento al origen $\rightarrow$ No puede pasar por 0 ni puede escapar a ∞



c) El momento de inercia de la esfera hueca será mayor que el de la esfera sólida. Si las esferas ruedan sin resbalar sobre una superficie inclinada, la esfera sólida debería rodar más rápido que la hueca. El experimento sería ubicarlas sobre un plano inclinado rugoso, y estudiar cuál cae más rápido.

P21

Examen



$$\vec{g} = -g \hat{z}_0$$

$$\Rightarrow \vec{g} = g \sin(\chi) \cos(\phi) \hat{r} - g \sin(\chi) \sin(\phi) \hat{\phi} - g \cos(\chi) \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r}_{cm} \times m \vec{g} = \frac{mL}{2} \hat{r} \times \vec{g}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \frac{mgL \cos(\chi)}{2} \hat{\phi} - \frac{mgL \sin(\chi) \sin(\phi)}{2} \hat{z}$$

- Momento de inercia respecto al eje $\hat{z}$ (solo I_{zz} de la matriz de inercia)

$$I_z = \int_0^H \int_0^L dr \rho r^2 = \rho \frac{L^3}{3} \cdot H$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{m}{L \cdot H} \cdot \frac{L^3 H}{3} = \frac{mL^2}{3}$$

$$I_z \ddot{\phi} = L_z \Rightarrow \frac{mL^2}{3} \ddot{\phi} = - \frac{mgL \sin(\chi) \sin(\phi)}{2}$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = - \frac{3g \sin(\chi)}{2L} \sin(\phi) \quad \bigg| \cdot \dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} \right) = \frac{3g \sin(\chi)}{2L} \frac{d}{dt} (\cos \phi) \quad \bigg| \int dt$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{3g \sin(\chi)}{L} \cdot (\cos \phi - \cos \alpha)}$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^0 \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{3g \sin(\chi)}{L}} \cdot t \Rightarrow \sin(\chi) = \frac{L}{3gT^2} \left(\int_{\alpha}^0 \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \alpha}} \right)^2$$

(b) $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \sin(\chi) = \frac{L}{3gT^2} \cdot \left(\int_{\pi/2}^0 \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi}} \right)^2 = 0.057$
 $\dots 17 \text{ m/s}^2$

P3 | Sea $x_1 \hat{x}$ y $x_2 \hat{x}$ la posición de cada masa.

Dado que ruedan sin resbalar $x_1 = R\phi_1$, $x_2 = R\phi_2$

Sea f_1 y f_2 la fuerza de roce sobre cada rueda, y N_1 y N_2 la normal.

$$\underline{\sum F = m\ddot{r}} \quad [K(x_2 - x_1 - L) - f_1] \hat{x} + [N_1 - M_1 g] \hat{y} = M_1 \ddot{x}_1 \hat{x}$$

$$[-K(x_2 - x_1 - L) - f_2] \hat{x} + [N_2 - M_2 g] \hat{y} = M_2 \ddot{x}_2 \hat{x}$$

$$\Rightarrow f_1 = K(R\phi_2 - R\phi_1 - L) - M_1 R \ddot{\phi}_1$$

$$f_2 = -K(R\phi_2 - R\phi_1 - L) - M_2 R \ddot{\phi}_2$$

$$\underline{\sum \vec{\tau}^{(cm)} = \dot{L}^{(cm)}}$$

$$f_1 R = M_1 R^2 \ddot{\phi}_1$$

$$f_2 R = M_2 R^2 \ddot{\phi}_2$$

$$\Rightarrow M_1 R^2 \ddot{\phi}_1 - K R^2 (\phi_2 - \phi_1 - \frac{L}{R}) + M_1 R^2 \ddot{\phi}_1 = 0$$

$$M_2 R^2 \ddot{\phi}_2 + K R^2 (\phi_2 - \phi_1 - \frac{L}{R}) + M_2 R^2 \ddot{\phi}_2 = 0$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K}{2M_1} & -\frac{K}{2M_1} \\ -\frac{K}{2M_2} & \frac{K}{2M_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{KL}{2M_1 R} \\ -\frac{KL}{2M_2 R} \end{pmatrix}$$

Ostendremos frecuencias

$$\begin{vmatrix} \frac{K}{2M_1} - \omega^2 & -\frac{K}{2M_1} \\ -\frac{K}{2M_2} & \frac{K}{2M_2} - \omega^2 \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\left(\frac{k}{2M_1} - \omega^2\right)\left(\frac{k}{2M_2} - \omega^2\right) - \frac{k^2}{4M_1M_2} = 0$$

$$\omega^4 - \frac{k}{2}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)$$

Los modos normales

$$\underline{\vec{v}_0} \quad \begin{pmatrix} \frac{k}{2M_1} & -\frac{k}{2M_1} \\ -\frac{k}{2M_2} & \frac{k}{2M_2} \end{pmatrix} \vec{v}_0 = 0 \Rightarrow \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{v}_1} \quad \begin{pmatrix} -\frac{k}{2M_2} & -\frac{k}{2M_1} \\ -\frac{k}{2M_2} & -\frac{k}{2M_1} \end{pmatrix} \vec{v}_1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{M_1}{M_2} \end{pmatrix}$$

- c) Si los cilindros resbalan no se puede imponer una relación entre la aceleración angular $\ddot{\phi}$ y la lineal $\ddot{x}$, por lo que aumentan las variables del problema. Hubiera sido imposible despejar el valor de la fuerza de roce.