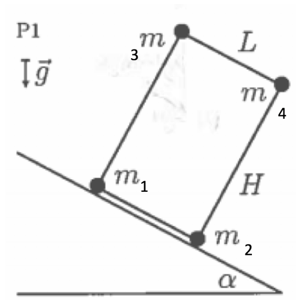
Pregunta 1

Un sistema rígido de barras sin masa tiene forma rectangular de base L y altura H. En cada uno de sus vértices se encuentran partículas idénticas de masa m y todo el sistema se encuentra sobre una superficie inclinada en un ángulo α respecto a la horizontal



(a)

Si el roce estático con la superficie es suficientemente grande tal que el sistema no deslice, se pide determinar la máxima altura H del rectángulo tal que el sistema pueda permanecer completamente estático.

Sea $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$, donde las fuerzas N_1,f_{r_1} están asociados a m_1 y N_2,f_{r_2} están asociados a m_2. Utilizando un sistema de coordenadas cartesianas, con $\hat{x}$ en la dirección de L, e $\hat{y}$ en la dirección de H, y además fijando el origen en m_1, se tiene que el torque ejercido (desde el origen) es:

$$\vec{\tau} = L\hat{x} \times mg\cos\alpha\hat{y} + L\hat{x} \times N_2\hat{y} + H\hat{y} \times mg\sin\alpha\hat{x} + H\hat{y} \times mg\sin\alpha\hat{x} + L\hat{x} \times mg\cos\alpha\hat{y}$$

Luego, para que el sistema no deslice (no tenga movimientos horizontales en la cuña), se debe cumplir que $\vec{\tau} = 0$ y $N_2 = 0$; lo cual al reemplazar nos da:

$$\Rightarrow 2Lmg\cos\alpha = 2Hmg\sin\alpha$$

$$\Rightarrow H \leq L\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(b)

Si el sistema desliza sobre la superficie, se pide determinar la altura H del rectángulo tal que las dos partículas de la base permanezcan siempre en contacto con la superficie. Considere en este caso que existe un coeficiente de roce cinético μ entre las partículas y la superficie

Las ecuaciones de movimineto en $\hat{x}$ y $\hat{y}$ son:

$$\hat{x}: \qquad 4m\ddot{x} = 4mg\sin\alpha - f_{r_1} - f_{r_2} \qquad (1)$$

$$\hat{y}: \qquad 0 = -4mg\cos\alpha + N_2 + N_1 \qquad (2)$$

Además, imponiendo $\vec{\tau_{cm}} = 0$ pues el sistema no gira, se tiene que:

$$\vec{\tau_{cm}} = (N_1 - N_2)\frac{L}{2} - \frac{H}{2}(f_{r_1} + f_{r_2}) = 0$$

$$\Rightarrow (N_1 - N_2)L = (f_{r_1} + f_{r_2})H \qquad (3)$$

Usando la relacion de que cuando el sistema desliza se cumple que $f_{r_1} = \mu N_1$, $f_{r_2} = \mu N_2$ $\Rightarrow f_{r_1} + f_{r_2} = \mu(N_1 + N_2)$. Reemplazando esta última igualdad en (3):

$$(N_1 - N_2)L = \mu H(N_1 + N_2) \qquad (4)$$

Luego, despejando (4) se obtiene:

$$N_1 = \frac{N_2(L + \mu H)}{L - \mu H}$$

Lo cual reemplazamos en (2):

$$4mg\cos\alpha = N_2 + \frac{N_2(L + \mu H)}{L - \mu H} \Longleftrightarrow N_2 = 2mg\cos\alpha\frac{(L - \mu H)}{L}$$

Pero como $N_2 \geq 0$ en particular igual a cero (condición de despegue), obtenemos que:

$$H \leq \frac{L}{\mu}$$

Pregunta 2

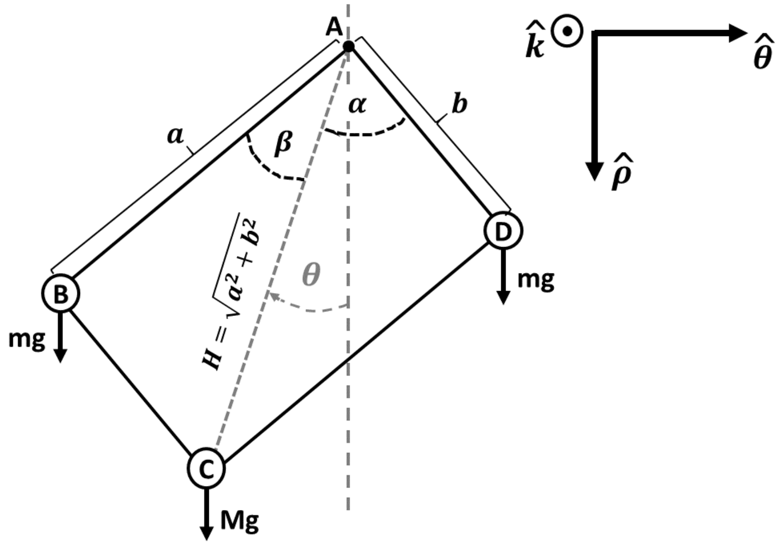


Figura 2: Diagrama del sistema

(a)

Primero definimos los angulos $\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ y la diagonal $H = \sqrt{a^2 + b^2}$, donde ubicamos el origen en el punto A podemos describir en coordenadas cilindricas las posiciones de las particulas:

$$\vec{r}_D = b\cos\alpha\hat{\rho} + b\operatorname{sen}\alpha\hat{\theta}$$
$$\vec{r}_C = \sqrt{a^2 + b^2}\hat{\rho}$$
$$\vec{r}_B = a\cos\beta\hat{\rho} - a\operatorname{sen}\beta\hat{\theta}$$

Con

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\vec{r}_D = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\rho} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\theta}$$
$$\vec{r}_C = \sqrt{a^2 + b^2}\hat{\rho}$$
$$\vec{r}_B = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\rho} - \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\theta}$$

Derivamos y encontramos las velocidades de las particulas:

$$\vec{v}_D = -\frac{ab\dot{\theta}}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\rho} + \frac{b^2\dot{\theta}}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\theta}$$
$$\vec{v}_C = \sqrt{a^2+b^2}\dot{\theta}\hat{\theta}$$
$$\vec{v}_B = \frac{ab\dot{\theta}}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\rho} + \frac{a^2\dot{\theta}}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\theta}$$

Ahora calculemos los momentos angulares:

$$l_D = mb^2\dot{\theta}\hat{k}$$
$$l_C = M(a^2+b^2)\dot{\theta}\hat{k}$$
$$l_B = ma^2\dot{\theta}\hat{k}$$

Por lo que el momento angular total es:

$$L = (m+M)(a^2+b^2)\dot{\theta}\hat{k}$$

Veamos la posicion del centro de masa:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m\vec{r}_D + m\vec{r}_B + M\vec{r}_C}{M+2m} = \frac{m+M}{M+2m}\sqrt{a^2+b^2}\hat{\rho}$$

Calculamos el torque del centro de masa con respecto al origen:

$$\tau_{cm} = \vec{r}_c m \times (2m+M)\vec{g}$$
$$\tau_{cm} = \frac{m+M}{M+2m}\sqrt{a^2+b^2}\hat{\rho} \times (2m+M)g(\hat{p}\cos\theta - \hat{\theta}\operatorname{sen}\theta)$$
$$\tau_{cm} = -g(m+M)\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}\theta\hat{k}$$

Igualamos la derivada temporal del momento angular total del sistema con el toque del centro de masa llegando a:

$$\tau_{cm} = \dot{L}$$
$$-g(m+M)\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}\theta = (m+M)(a^2+b^2)\ddot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\theta$$

De aqui obtenemos que la frecuencia para pequeñas oscilaciones es $\omega^2 = \frac{g}{\sqrt{a^2+b^2}}$ donde por simetria los angulos de equilibrio son $\theta_{eq} = 0$, equilibrio estable y $\theta_{eq} = \pi$ equilibrio inestable.

(b)

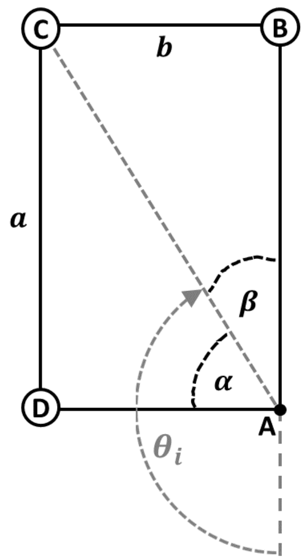


Figura 3: Diagrama del sistema $\theta = \theta_i$

El angulo incial del centro de masa corresponde a $\theta_i = \frac{\pi}{2} + \alpha$ y queremos encontrar el angulo que forma la arista AB con la horizontal cuando se detenga nuevamente. Por conservacion de la energia mecanica del centro de masa podemos calcular esta en el momento incial donde la energia cinetica es nula y tenemos potencial gravitatoria:

$$E_i = (2m + M)gr_{cm} \operatorname{sen} \alpha = ag(m + M)$$

Con la altura nula en el punto A, tenemos que la energia mecanica del centro de masa del sistema en cualquier momento es $E = K + U$ con K la energia cinetica y U la energia potencial, esta ultima la podemos decribir de la siguiente manera:

$$U = -(m + M)\sqrt{a^2 + b^2}g \cos \theta$$

Los momentos donde el sistema se detiene, la energia cinetica en nula $K = 0$, igualando con la energia inicial:

$$-(m + M)\sqrt{a^2 + b^2}g \cos \theta = ag(m + M)$$

$$\cos \theta = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\theta = \arccos -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Recordando que

$$\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \longrightarrow \quad \beta = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\therefore \theta = \pm(\pi - \beta) \quad \Rightarrow \quad \theta_f = -\pi + \beta$$

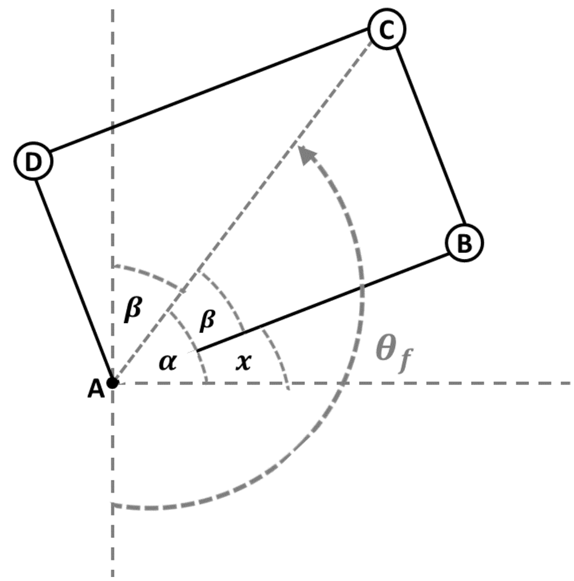


Figura 4: Diagrama del sistema en $\theta = \theta_f$

Posicionando el sistema en el angulo final θ_f y analizando geometricamente (visto en la figura 4) que el angulo formado por la arista AB con la horizontal es $x = \frac{\pi}{2} - 2\beta$

Ahora calcularemos la velocidad del sistema a partir de la edo encontrada anteriormente para θ aplicando $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\theta$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}' d\dot{\theta}' = \int_{\theta_i}^{\theta} -\frac{g}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\theta' d\theta'$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{\sqrt{a^2+b^2}}(\cos\theta - \cos\Big(\frac{\pi}{2}+\alpha\Big))$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{\sqrt{a^2+b^2}}(\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})}$$

Aplicando que el sistema y en particular el vertice C alcanza su maxima velocidad en $\theta = 0$ (en este angula la energia potencial alcanza su valor minimo y por conservacion de la energia, la cinetica la compensa alcamzando el valor maximo) obtenemos que:

$$\dot{\theta}_{max} = \dot{\theta}(\theta = 0) = \sqrt{\frac{2g}{\sqrt{a^2+b^2}}(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})}$$

Por ultimo sabemos que la velocidad máxima del vertice C en $\theta = 0$, $V^C_{max} = \sqrt{a^2+b^2}\dot{\theta}_{max}$

$$V^C_{max} = \sqrt{2g(a + \sqrt{a^2+b^2})}$$

Pregunta 3

Considerando el sistema de coordenadas cartesianas estándar, podemos hacer las ecuaciones de fuerzas y torques como siguen, considerando $\vec{F}_r$ como la fuerza de roce, $\vec{a}$ como la aceleración del centro de masa y $\vec{\alpha}$ como la aceleración angular:

$$\begin{aligned} M\vec{a} &= \vec{T} + \vec{F}_r \\ Ma_x\hat{x} &= T\cos\theta\hat{x} - F_r\hat{x} \\ Ma_x &= T\cos\theta - F_r \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= r\vec{T} + R\vec{F}_r \\ I_{CM}\alpha &= -rT + RF_r \end{aligned} \tag{2}$$

Además, puesto que el carrete rueda sin deslizarse, podemos hacer la igualdad $a_x = R\alpha$. Con eso, procedemos a combinar las ecuaciones (1) y (2):

$$I_{CM}\alpha = -rT + RF_r \tag{2}$$

$$\begin{aligned} RF_r &= \frac{I_{CM}}{R}a_x + rT \\ F_r &= \frac{I_{CM}}{R^2}a_x + T\frac{r}{R} \end{aligned}$$

$$Ma_x = T\cos\theta - F_r \tag{1}$$

$$\begin{aligned} Ma_x &= T\cos\theta - \frac{I_{CM}}{R^2}a_x - T\frac{r}{R} \\ a_x\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right) &= T\cos\theta - T\frac{r}{R} \end{aligned}$$

Nótese que al ser el término $\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)$ siempre estrictamente positivo, el signo de a_x dependerá exclusivamente del valor de la expresión igualada $\left(T\cos\theta - T\frac{r}{R}\right)$. Es decir:

$$a_x < 0 \implies T\cos\theta - T\frac{r}{R} < 0 \tag{3}$$

$$a_x = 0 \implies T\cos\theta - T\frac{r}{R} = 0 \tag{4}$$

$$a_x > 0 \implies T\cos\theta - T\frac{r}{R} > 0 \tag{5}$$

Así mismo, el signo de a_x representa directamente el sentido en el que se mueve el carrete (positivos hacia la derecha, negativos hacia la izquierda), y $a_x = 0$ representa el punto crítico donde el carrete se mantiene en equilibrio, y como tal la condición que separa un movimiento del otro.

Luego, estudiando más a fondo la ecuación (4):

$$T\cos\theta - T\frac{r}{R} = 0 \tag{4}$$

$$\cos\theta = \frac{r}{R}$$

$$\theta_c = \arccos\frac{r}{R}$$

Siendo θ_c el ángulo crítico donde cambia el sentido de movimiento del carrete.