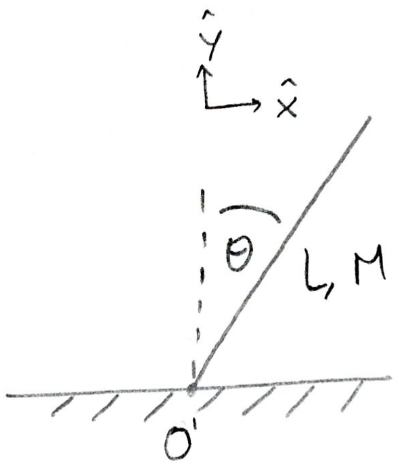
AUX 18

P1



Escribimos la energía del sólido

$$U = Mg\vec{r}_{CM}\cdot\hat{y}$$
$$= Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$K = \frac{1}{2}I^{(O')}\dot{\theta}^2$$

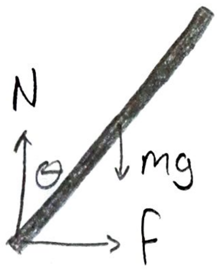
El momento de inercia de la barra respecto a su extremo es $I^{(O')} = \int x^2\,dm = \int_0^L x^2\cdot\frac{M}{L}\,dx = \frac{M}{3}L^2$

$$K = \frac{M}{6}L^2\dot{\theta}^2$$

La energía en el instante inicial es $E = Mg\frac{L}{2}$. Por conservación de la energía $Mg\frac{L}{2} = Mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{M}{6}L^2\dot{\theta}^2$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(1-\cos\theta)$$

b) Vemos la 2 ley de Newton sobre el centro de masas



$$\vec{r}_{CM} = \frac{L}{2}(\cos\theta\,\hat{y} + \sin\theta\,\hat{x})$$

$$M\ddot{\vec{r}}_{CM} = \frac{ML}{2}\left[(-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta)\hat{y} + (\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\hat{x}\right]$$
$$= (N - Mg)\hat{y} + f\,\hat{x}$$

$\hat{y}|$ $N = Mg - \frac{ML}{2}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)$

Se tiene $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(1-\cos\theta) \longrightarrow \ddot{\theta} = \frac{3g}{L}\sin\theta$

En el instante que la barra resbala $f = \mu N$

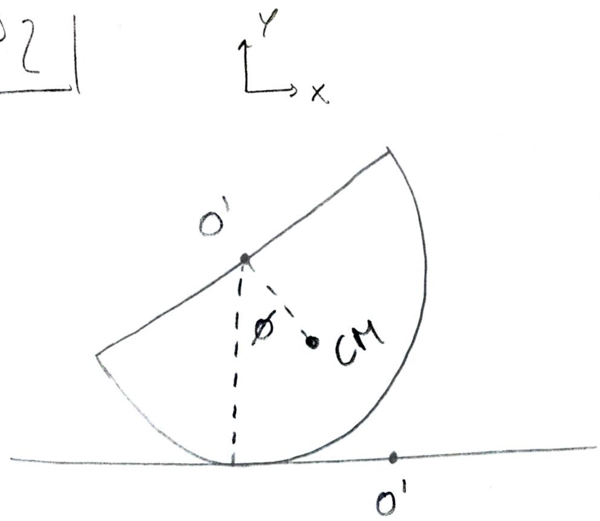
La ecuación en $\hat{x}$ queda

$$f = \mu\left[Mg - \frac{ML}{2}\left(\frac{3g}{L}\sin^2\theta_0 - \frac{3g}{L}\cos^2\theta_0 + \frac{3g}{L}\cos\theta_0\right)\right]$$

$$= \frac{ML}{2}\left[\frac{3g}{L}\sin\theta_0\cos\theta_0 + \frac{3g}{L}\sin\theta_0\cos\theta_0 - \frac{3g}{L}\sin\theta_0\right]$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\sin(2\theta_0) - \sin\theta_0}{\frac{2}{3} - \cos(2\theta_0) - \cos\theta_0}$$

P2



Ubicamos O en el suelo en el punto de equilibrio

O' en el centro de curvatura del disco, con un eje $\hat{x}'$ apuntando hacia el CM.

Queremos la energía del sólido

$$K = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}_{O'}^{\,2} + M\dot{\vec{R}}_{O'}\left(\vec{\Omega}\times\vec{R}'_{CM}\right) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot I^{(O')}\vec{\Omega}$$

- $\vec{R}_{O'} = R\hat{y} - R\phi\hat{x} \longrightarrow \dot{\vec{R}}_{O'} = -R\dot{\phi}\hat{x}$

- $\vec{R}'_{CM} = \frac{1}{M}\int\left(r\cos\phi\,\hat{x}' + r\sin\phi\,\hat{y}'\right)dm = \frac{2}{\pi R^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r\left(\cos\phi\,\hat{x}' + \sin\phi\,\hat{y}'\right)\cdot r\,dr\,d\phi$

$$= \frac{4R}{3\pi}\hat{x}' = \frac{4R}{3\pi}\left(\sin\phi\,\hat{x} - \cos\phi\,\hat{y}\right)$$

- $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\hat{z}$
- $I_{zz}^{(O')} = \int(x^2+y^2)\,dm = \frac{2M}{\pi R^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r^2\cdot r\,dr\,d\phi$

$$= \frac{MR^2}{2}$$

La energía cinética queda $K = \frac{MR^2}{2}\dot{\phi}^2 - MR\dot{\phi}\cdot\frac{4R\dot{\phi}}{3\pi}\cos\phi + \frac{MR^2}{4}\dot{\phi}^2$

Aproximamos $\cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$, y eliminamos los términos orden 3 o más

$$K = MR^2\dot{\phi}^2\left[\frac{3}{4} - \frac{4}{3\pi}\right]$$

Calculamos la energía potencial utilizando el centro de masas: $U = Mg\,\vec{R}_{cm} \cdot \hat{y}$

$$U = MgR\left(1 - \frac{4\cos\phi}{3\pi}\right) \approx \frac{2MgR}{3\pi}\phi^2 + cte$$

La energía es $E = MR^2\left[\frac{3}{4} - \frac{4}{3\pi}\right]\dot{\phi}^2 + \frac{2MgR}{3\pi}\phi^2 + cte$

Por conservación de la energía $\frac{dE}{dt} = 0$

$$\Rightarrow 2MR^2\left[\frac{3}{4} - \frac{4}{3\pi}\right]\ddot{\phi} + \frac{4MgR}{3\pi}\phi = 0$$

Un oscilador armónico con frecuencia $\omega^2 = \dfrac{2g}{3\pi R\left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3\pi}\right)}$