Soluciones
Guía de Problemas 8

FI2001-6 Mecánica
Profesor: Francisco Brieva Rodríguez
Auxiliares: Esteban Aguilera Marinovic
Joaquín Medina Dueñas

Problema 1

Se definirá el sistema de coordenadas $\hat{x}$, sistema con velocidad relativa nula respecto al centro de masa del sistema a estudiar, tal que las posiciones de las masas se puedan escribir como $x_i\hat{x}$. Sea $x_0\hat{x}$ la posición de la masa central M, $x_1\hat{x}$ y $x_2\hat{x}$ las posiciones de las masas m amarradas a M. Para resolver este problema se supondrá que no existen fuerzas externas actuando sobre el sistema, por lo que la velocidad del centro de masa de esta molécula será constante.

En primer lugar, se deben plantear las ecuaciones de movimiento para cada una de las partículas. Como no existen fuerzas externas en este sistema y por la ley de acción y reacción, cabe destacar que $F_M = -F_{m1} - F_{m2}$. Las ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{cases} M\ddot{x_0} = k(x_1 - x_0 - l) + k(x_2 - x_0 + l) \\ m\ddot{x_1} = -k(x_1 - x_0 - l) \\ m\ddot{x_2} = -k(x_2 - x_0 + l) \end{cases} \tag{1}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales en el cual las variables están acopladas entre sí. Para resolver este sistema, primero buscaremos los puntos de equilibrio para x_0, x_1 y x_2 para luego realizar un cambio de variable que describa el movimiento de cada partícula según $\delta_i = x_i - x_i*$ con x_i* el punto de equilibrio. Es fácil notar que los puntos:

$$\begin{cases} x_0* = x_0* \\ x_1* = x_0 * + l \end{cases} \quad x_2* = x_0 * - l$$

Son puntos de equilibrio para el sistema 1. Luego, para realizar el cambio de variables planteado, se tiene que:

$$\begin{cases} x_0 = x_0 * + \delta_0 \\ x_1 = x_0 * + l + \delta_1 \\ x_2 = x_0 * - l + \delta_2 \end{cases} \tag{2}$$

Reemplazando los valores de 2 en el sistema 1, se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{cases} \ddot{\delta_0} = -\frac{2k}{M}\delta_0 + \frac{k}{M}\delta_1 + \frac{k}{M}\delta_2 \\ \ddot{\delta_1} = \frac{k}{m}\delta_0 - \frac{k}{m}\delta_1 \\ \ddot{\delta_2} = \frac{k}{m}\delta_0 - \frac{k}{m}\delta_2 \end{cases} \tag{3}$$

Luego, nuestro *Ansatz* será que δ_i tienen soluciones del tipo $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$. Siendo este el caso, entonces $\ddot{\delta_i} = -\omega^2\delta_i$. De esta forma, el sistema puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \omega^2\delta_0 = \frac{2k}{M}\delta_0 - \frac{k}{M}\delta_1 - \frac{k}{M}\delta_2 \\ \omega^2\delta_1 = -\frac{k}{m}\delta_0 + \frac{k}{m}\delta_1 \\ \omega^2\delta_2 = -\frac{k}{m}\delta_0 + \frac{k}{m}\delta_2 \end{cases} \tag{4}$$

Para simplificar el problema, este sistema se puede escribir de forma matricial, siendo reducido a:

$$\begin{bmatrix} \frac{2k}{M} - \omega^2 & -\frac{k}{M} & -\frac{k}{M} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - \omega^2 & 0 \\ -\frac{k}{m} & 0 & \frac{k}{m} - \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

Como buscamos soluciones no triviales a este problema matricial, imponemos la condición que el determinante de la matriz sea nulo y buscaremos valores para ω^2. Si la matriz fuese invertible, entonces las soluciones al problema serían simplemente las triviales y no abarcaríamos todas las soluciones posibles. Luego, el determinante de la matriz se puede escribir como:

$$-\left[2mk^2\omega^2 + Mk^2\omega^2 - 2m^2k\omega^4 - 2mMk\omega^4 + Mm^2\omega^6\right]\frac{1}{Mm^2} = 0 \tag{6}$$

A partir de la ecuación 6 se puede concluir que los valores de ω^2 que cumplen el sistema de ecuaciones diferenciales planteados originalmente son:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 0 \\ \omega_2^2 = \frac{k}{m} \\ \omega_3^2 = \frac{k(M+2m)}{Mm} \end{cases} \tag{7}$$

Entonces, la solución a las variables δ_i será combinación lineal de las soluciones del tipo $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ con los valores de ω obtenidos en 7. Para entrar en mayor detalle a que tipo de movimiento representan estas soluciones, entonces debemos reemplazar las soluciones obtenidas en el sistema 4.

En primer lugar está $\omega^2 = 0$. Esta es la solución estática al sistema de ecuaciones diferenciales, lo que se puede notar al reemplazar el valor de ω en 4 que resulta en:

$$\begin{cases} 0 = 2\delta_0 - \delta_1 - \delta_2 \\ 0 = -\delta_0 + \delta_1 \\ 0 = -\delta_0 + \delta_2 \end{cases}$$

A partir de esto, se puede deducir que en este caso $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2$.

Con respecto al caso en que $\omega^2 = \frac{k}{m}$, al reemplazar este valor en 4, se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{cases} \frac{1}{m}\delta_0 = \frac{2}{M}\delta_0 - \frac{1}{M}\delta_1 - \frac{1}{M}\delta_2 \\ \delta_1 = -\delta_0 + \delta_1 \\ \delta_2 = -\delta_0 + \delta_2 \end{cases}$$

A partir de esto, se puede deducir que $\delta_0 = 0$ y $\delta_1 = -\delta_2$. Esto se puede interpretar como una solución en que las masas se mueven simétricamente. A continuación, la figura 1 muestra la forma del movimiento de las partículas en función del tiempo.

Finalmente, respecto al caso de $\omega^2 = \frac{k(M+2m)}{Mm}$, el sistema de ecuaciones 4 se puede reducir a:

$$\begin{cases} \frac{M}{m}\delta_0 = -\delta_1 - \delta_2 \\ \frac{2m}{M}\delta_1 = -\delta_0 \\ \frac{2m}{M}\delta_2 = -\delta_0 \end{cases}$$

De esto, se puede deducir que $\delta_1 = \delta_2$ y $\delta_0 = -\frac{m}{M}(\delta_1 + \delta_2)$. En esta solución, las masas m se mueven en el mismo sentido y de forma contraria, tal como se puede ver a continuación en la figura 2.

Finalmente, cabe concluir que la solución a este problema (como ya se mencionó anteriormente) es la combinación lineal de las soluciones obtenidas anteriormente. Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \phi_1\right) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{k(M+2m)}{Mm}}t - \phi_2\right) \begin{bmatrix} -\frac{2m}{M} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

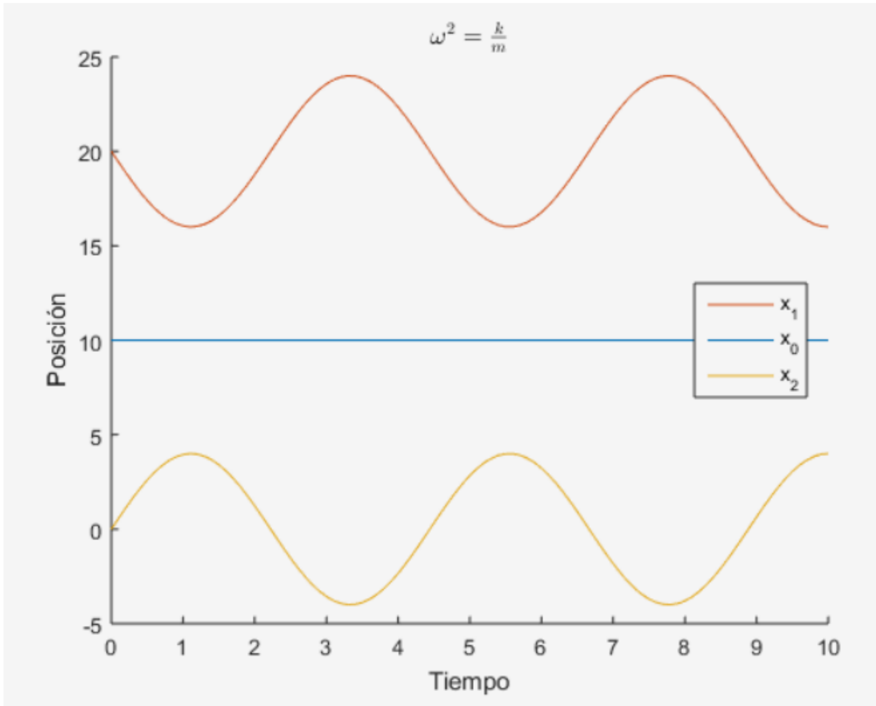

Figura 1: Solución al sistema con $\omega^2 = \frac{k}{m}$

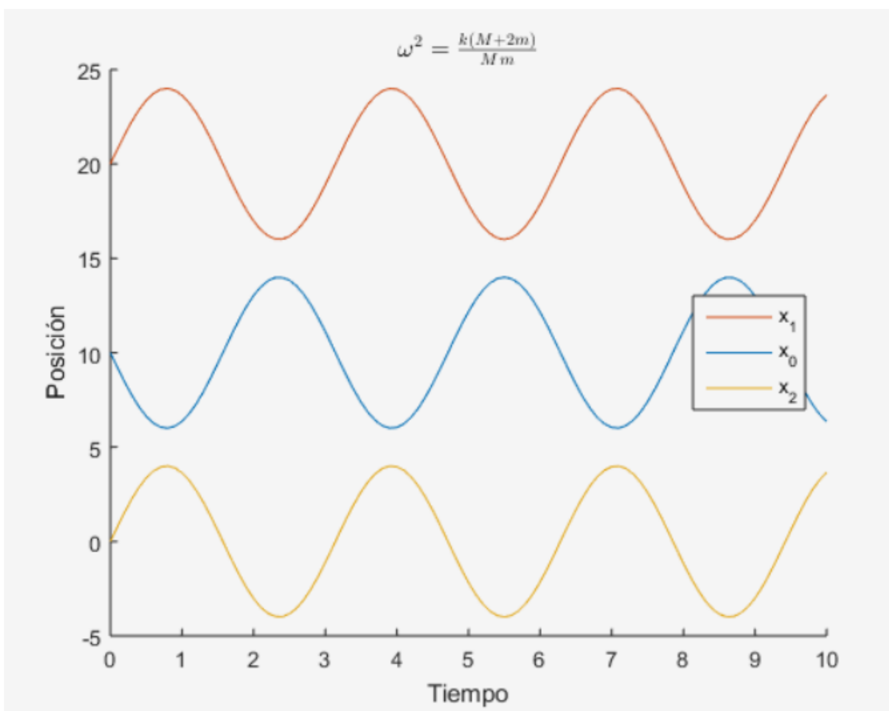

Figura 2: Solución al sistema con $\omega^2 = \frac{k(M+2m)}{Mm}$

Recordando el cambio de variables realizado en 2, podemos llegar a la solución final:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0* \\ x_0*+l \\ x_0*-l \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \phi_1\right) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{k(M+2m)}{Mm}}t - \phi_2\right) \begin{bmatrix} -\frac{2m}{M} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La forma que tiene esta solución se puede apreciar a continuación en la figura 3, donde la solución es la suma de las soluciones anteriores obtenidas.

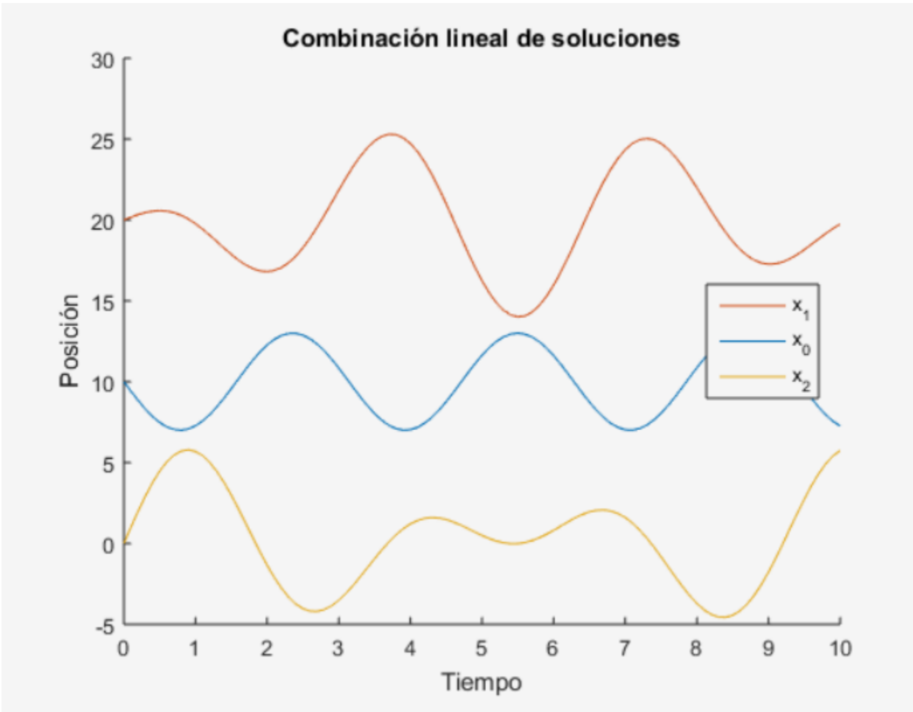

Figura 3: Solución al sistema como combinación lineal de soluciones

Pregunta 2

(a)

Para calcular v_1 basta conocer la energía (la cual se conserva por solo haber fuerzas centrales) que tiene la nave cuando se encuentra en la orbita elíptica.

$$E = \frac{l^2 A^2}{2m} - \frac{m}{2}(\frac{GMm}{l})^2$$

Notamos que tenemos 2 incognitas $A \wedge l$, para ello recurrimos a las definiciones de R y e, donde es posible despejar estas variables desconocidas.

$$R = \frac{l^2}{GMm^2} \wedge e = \frac{Al^2}{GMm^2}$$

Además recordando que $e = \frac{R_1 - R_t}{R_1 + R_t}$ y si luego lo reemplazamos en $R_t = \frac{R}{1+e}$ obtenemos $R = \frac{2R_1 R_t}{R_1 + R_t}$, tras lo anterior pudimos expresar tanto e como R en función de variables conocidas, luego es directo despejar A pues:

$$A = \frac{e}{R} = \frac{R_1 - R_t}{2R_t R_1}$$

Además, si de R despejamos l y sustituimos el valor de R, obtenemos:

$$l^2 = \frac{2R_1 R_t (GMm^2)}{R_{1+R_t}}$$

Si sustituimos estas variables en la ecuacion de energía resulta:

$$E = -\frac{GMm}{R_1 + R_t}$$

Como el signo es negativo efectivamente corresponde a una trayectoria elíptica: Sabemos además que $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$. Para el caso donde $r = R_t$ tenemos que v solo tiene componente tangencial por ser la distancia mínima de la elipse.

$$\implies \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R_t} = -\frac{GMm}{R_1 + R_t}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GMR_1}{R_t(R_1 + R_t)}}$$

Pero esta es la velocidad con que sale la nave de la tierra respecto a un S.R externo, es decir $v = v_1 + \omega_t R_t$.

$$\implies v_1 = \sqrt{\frac{2GMR_1}{R_t(R_1 + R_t)}} - \omega_t R_t$$

(b)

Para calcular la variación de momentum es necesario conocer la velocidad que tiene la nave en ambas trayectorias. Para la orbita circular es posible proseguir identificando a la fuerza de atracción gravitacional como fuerza centripeta, donde obtenemos:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}$$

Esta velocidad sirve debido a que los radios de una orbita geoestacionaria son fijos. Para ver la velocidad que tiene en la elipse, proseguimos de forma analoga que la parte a) pero evaluando ahora en $r = R_1$.

$$-\frac{GMm}{R_1 + R_t} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R_1}$$

$$\implies v_e = \sqrt{\frac{2GMR_t}{R_1(R_1 + R_t)}}$$

Como m no cambia, la variación de momentum queda:

$$\Delta p = m\sqrt{\frac{GM}{R_1}}(1 - \sqrt{\frac{2R_t}{R_1 + R_t}})$$

(c)

Para el caso de una trayectoria parabólica $E = 0$ por ende dada la energía mecánica total de la circunferencia:

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{R_1} = 0$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM}{R_1}}$$

Por lo tanto, la variación de momentum queda:

$$m\sqrt{\frac{GM}{R_1}(\sqrt{2} - 1)}$$

Pregunta 3

(a)

Por segunda ley de Newton se tiene que:

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{-GmM}{r^2}\hat{r}$$

donde $\hat{r}$ es el versor en dirección a la partícula desde el centro del potencial y r es la distancia a dicho punto y $\frac{-GmM}{r^2}$ es menos el gradiente de la energía potencial $U(r) = mV(r)$. Ahora calculamos el torque que produce esta fuerza en la posición $\vec{r} = r\hat{r}$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{-GmM}{r^2}\hat{r} = \frac{-GmM}{r}(\hat{r} \times \hat{r}) = 0$$

Esto implica que el momentum angular se conserva, y desde ahora lo llamaremos $\vec{l} = \vec{r}xm\vec{v}$. Dado que el momentum angular se conserva, el movimeinto es plano, y como la coordenada relevante es la distancia del punto respecto a la fuente de la fuerza, usando coordenadas polares se tiene que:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2}$$

$$m\frac{d(r^2\theta)}{rdt} = 0$$

Si calculamos el momentum angular en estas coordenadas nos queda que:

$$\vec{l} = mr^2\dot{\theta}\hat{k}$$

que es justamente la magnitud cuya derivada es cero, luego si llamamos $l = |\vec{l}| = mr^2\dot{\theta}$ y despejamos $\dot{\theta}$ en la primera ecuación nos queda que:

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{GmM}{r^2}$$

Es fácil ver que al integrar obtenemos el siguiente potencial efectivo:

$$U_{eff} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$$

con ese potencial obtenemos que:

$$m\ddot{r} = -\frac{dU_{eff}}{dr}$$

(b)

Por definición la energía total es, usando coordenadas polares:

$$E = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2} - \frac{GmM}{r}$$

Si reemplazamos la velocidad angular en función del momentum angular y del radio, nos queda que:

$$E(r, \dot{r}) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r)$$

(c)

A partir de aca, consideraremos la energía como constante, en primer lugar si despejamos la velocidad radial al cuadrado nos queda que:

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}(E - U_{eff})$$

Al usar regla de la cadena respecto al ángulo y reemplzar la velocidad angular en función del radio y del momentum, nos queda que

$$(\frac{dr}{d\theta})^2 = \frac{m^2 r^4}{l^2}\frac{2}{m}(E - U_{eff}) = \frac{m^2 r^4}{l^2}\frac{2}{m}(E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{GmM}{r})$$

luego, basta con f(r) igual al corcho de arriba y se tiene la igualdad.

(d)

$$\frac{l}{\sqrt{2m}}\int \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}}}\frac{1}{r^2} = \int d\theta \tag{8}$$

Calculemos:

$$\frac{l}{\sqrt{2m}}\int \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}}}\frac{1}{r^2}$$

Cambio de variable $u = 1/r$

$$-\frac{l}{\sqrt{2m}}\int \frac{du}{\sqrt{-u^2\frac{l^2}{2m} + uGMm + E}}$$

Rellenando los cuadrados

$$-\frac{l}{\sqrt{2m}}\int \frac{du}{\sqrt{E + \frac{m^3 M^2 G^2}{2l^2} - (u\frac{l}{\sqrt{2m}} - \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{GMm}{l})^2}}$$

Con cambio de variable $v = u\frac{l}{\sqrt{2m}}$

$$-\int \frac{du}{\sqrt{E + \frac{m^3 M^2 G^2}{2l^2} - (v - \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{GMm}{l})^2}}$$

Con lo cual queda una integral del tipo:

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x-b)^2}} = arccos(\frac{x-b}{a})$$

Entonces remplazando $a = \sqrt{E + \frac{M^2 m^3 G^2}{2l^2}}$ y $b = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{GMm}{l}$ nos da:

$$-\int \frac{du}{\sqrt{E + \frac{m^3 M^2 G^2}{2l^2} - (v - \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{GMm}{l})^2}} = arccos(\frac{\frac{1}{r} - b}{a})$$

Remplazando el la ecuación (1):

$$\begin{aligned} arccos(\frac{\frac{1}{r} - b}{a}) &= \theta + C \\ \frac{\frac{1}{r} - b}{a} &= cos(\theta + C) \\ \frac{1}{r} &= b + acos(\theta + C) \\ r &= \frac{1}{b + acos(\theta + C)} \\ r &= \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{GMm}{l} + (\sqrt{E + \frac{M^2 m^3 G^2}{2l^2}})cos(\theta + C)} \end{aligned}$$

Pregunta 4

El objetivo de esta pregunta es encontrar el ángulo χ que corresponde al ángulo de desviación con respecto al eje OZ de la partícula m lanzada desde muy lejos ($\|\vec{r}_{\text{Inicial}}\| \to \infty$) con una rapidez inicial v_0 y dirección paralela a OZ (i.e. $\vec{v} = v_0\hat{z}$) atraída por el potencial gravitacional $V(r) = -\frac{GM}{r}$ con centro de simetría fijo en O.

(a)

En esta parte se nos pide expresar la energía y el momento angular de la partícula en función de v_0 y d, como también encontrar la distancia radial mínima de acercamiento de la partícula al origen, expresado en función de v_0 y d.

El problema nos indica que el potencial gravitatorio está dado por $V = -\frac{GM}{r}$, el cual corresponde a la energía potencial en el campo gravitatorio por unidad de masa, como la partícula que se acerca tiene una masa m, se puede desprender que la energía potencial está dada por:

$$\bar{V}(r) = mV(r) = -\frac{GmM}{r}$$

Con lo anterior, se tiene que $\vec{F} = -\nabla\bar{V}(r)$, como el potencial está expresado en función de r, se tiene $\nabla = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\hat{r}$. Así:

$$\vec{F} = -\nabla\vec{V}(r) = -\frac{\mathrm{d}\bar{V}(r)}{\mathrm{d}r}\hat{r} = -\frac{\mathrm{d}\left(-\frac{GmM}{r}\right)}{\mathrm{d}r}\hat{r} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

Para tener que la conservación del momento angular respecto al origen, basta ver que el torque respecto al origen está dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r\hat{r} \times -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = -\frac{GMm}{r}(\hat{r} \times \hat{r}) = 0$$

Como sabemos que $\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0$, se tiene que el momentum angular de la partícula de masa m, es constante, así, el movimiento de ésta, ocurre en un plano.

También tenemos que $-x(t)\hat{z}$ será la posición horizontal de la partícula de masa m con respecto al origen O, la cual varía en el tiempo y es negativa porque se acerca desde el lado contrario del eje $\hat{z}$, por otro lado se tiene que la posición vertical es $d\hat{y}$. Así, nuestro vector posición está dado por la suma de éstos vectores: $\vec{r} = -x(t)\hat{z} + d\hat{y}$. Con esto podemos calcular el momento angular:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = (-x(t)\hat{z} + d\hat{y}) \times (mv_0\hat{z}) = -mv_0x(t)(\hat{z} \times \hat{z}) + dmv_0(\hat{y} \times \hat{z}) = dmv_0(\hat{y} \times \hat{z})$$

De este modo, tenemos que $\ell = ||\vec{\ell}|| = mdv_0$

Por otro lado, es sabido que la energía de la partícula se conserva, así que se calculará esta a partir de su situación inicial al ser lanzada, notar para esto que $E = K + \bar{V}(r)$, pero dado que inicialmente la partícula se lanza desde muy lejos, es posible interpretar esto como un valor de r muy grande, eventualmente $r \to \infty$, lo que lleva a que $\bar{V}(r) = -\frac{GmM}{r} \to 0$, de esta forma es posible despreciar la energía potencial, resultado la energía total:

$$E = K = \frac{mv_0^2}{2}$$

Por otro lado, es importante calcular la función de potencial efectivo, que corresponde a:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} = \frac{md^2v_0^2}{2r^2} - \frac{GmM}{r}$$

Esto es importante, debido a que como $E > 0$, se tiene que $r_{\text{mín}}$ corresponde al único valor radial que cumple $V_{\text{eff}}(r_{\text{mín}}) = E$, de esta forma es posible extraer el valor de $r_{\text{mín}}$ como sigue:

$$V_{\text{eff}}(r_{\text{mín}}) = E \Rightarrow \frac{md^2v_0^2}{2r_{\text{mín}}^2} - \frac{GmM}{r_{\text{mín}}} = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0^2 r_{\text{mín}}^2 + 2GMr_{\text{mín}} - d^2v_0^2 = 0$$

De aquí se obtiene:

$$r_{\text{mín}} = \frac{-2GM \pm \sqrt{4G^2M^2 + 4d^2v_0^4}}{2v_0^2} = \frac{-GM \pm \sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}{v_0^2}$$

Dado que las distancias radiales se definen como valores positivos, $r_{\text{mín}}$ también lo es, de esta forma:

$$r_{\text{mín}} = \frac{\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4} - GM}{v_0^2}$$

(b)

Para esta parte, se pide encontrar una expresión de la energía del tipo $E(r, \dot{r})$ utilizando el potencial efectivo, en efecto:

$$E(\vec{r}) = K(\vec{r}) + \bar{V}(\vec{r}) = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{GmM}{r} = \frac{m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)}{2} - \frac{GmM}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$$

Lo que es posible escribir así ya que en la parte (a) de la pregunta 3, se demostró que para este mismo potencial $\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$. En dónde se tiene que el potencial efectivo corresponde a:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$$

Siendo así posible de igual forma, escribir la energía como $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r)$, en dónde la expresión dónde esta explícitamente depende de r y $\dot{r}$, que es lo que se pedía, corresponde a:

$$E(r, \dot{r}) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$$

Que es precisamente lo buscado, aún así, haciendo mas explícitos los parámetros del problema y recordando que $\ell = mdv_0$, se tiene que:

$$E(r, \dot{r}) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{md^2v_0^2}{2r^2} - \frac{GmM}{r} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \left(\frac{dv_0}{r}\right)^2 - \frac{2GM}{r}\right)$$

Que es una expresión aun mas explícita de lo buscado.

(c)

Ahora se busca encontrar una expresión del tipo $\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = f(r)$, esto se hace de forma idéntica a la parte (c) de la pregunta 3, notando que:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\ell}{mr^2}$$

Lo que lleva a que:

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 \frac{\ell^2}{m^2r^4} \Rightarrow E(r,\dot{r}) = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 \frac{\ell^2}{2mr^4} + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$$

De donde es posible extraer finalmente lo que se busca obtener, que corresponde a:

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{2mr^4E}{\ell^2} + \frac{2Gm^2Mr^3}{\ell^2} - r^2$$

En donde se tiene que $f(r) = \frac{2mr^4E}{\ell^2} + \frac{2Gm^2Mr^3}{\ell^2} - r^2 = r^2\left(\frac{2mE}{\ell^2}r^2 + \frac{2Gm^2M}{\ell^2}r - 1\right)$.

Pero, al igual que en la parte anterior, es posible notar que $\ell = mdv_0$ y además $E = \frac{mv_0^2}{2}$, lo que lleva la expresión a una forma mas explícita según los parámetros del problema:

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{2mr^4\frac{mv_0^2}{2}}{m^2d^2v_0^2} + \frac{2Gm^2Mr^3}{m^2d^2v_0^2} - r^2 = \frac{r^4}{d^2} + \frac{2GMr^3}{d^2v_0^2} - r^2 = r^2\left(\frac{r^2}{d^2} + \frac{2GMr}{d^2v_0^2} - 1\right)$$

En dónde se llega a que: $f(r) = r^2\left(\frac{1}{d^2}r^2 + \frac{2GM}{d^2v_0^2}r - 1\right)$

(d)

En esta parte, se busca obtener una función $\theta(r)$, además se pide determinar el ángulo $\theta_{\text{mín}}$ que tiene la partícula respecto al eje OZ en el momento que ocurre el máximo acercamiento, i.e., en $\rho_{\text{mín}}$, para de esta forma obtener el ángulo χ con que la partícula escapa del potencial gravitacional.

En esta parte, dado lo obtenido en la parte anterior (c), se puede realizar de forma análoga el procedimiento presente en la parte (d) de la pregunta 3, i.e.:

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = f(r) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \pm\sqrt{f(r)} \Rightarrow \pm\frac{r'(\theta)}{\sqrt{f(r(\theta))}} = 1$$

En donde integrando a ambos lados, desde un ángulo 0 positivo (0^+) hasta un ángulo θ arbitrario, es posible establecer un valor para θ en función de r, para este caso, se tomará $r = r(\theta)$, así:

$$\pm\int_{0^+}^{\theta} \frac{r'(\bar{\theta})}{\sqrt{f(r(\bar{\theta}))}}\,\mathrm{d}\theta = \int_{0^+}^{\theta}\mathrm{d}\bar{\theta} \Rightarrow \int_{\infty}^{r}\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\sqrt{f(\bar{r})}} = \mp\theta$$

De esta forma, reemplazando el valor de $f(r)$, se puede llegar a que:

$$
\begin{aligned}
\mp\theta &= \int_{\infty}^{r} \frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\bar{r}\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2}\bar{r}^2 + \frac{2Gm^2M}{\ell^2}\bar{r} - 1}} \underset{(\star)}{=} \arcsin\left(\frac{Gm^2M\bar{r} - \ell^2}{\bar{r}\sqrt{G^2m^4M^2 + 2m\ell^2E}}\right)\Bigg|_{\bar{r}\to\infty}^{\bar{r}=r} \\
&= \arcsin\left(\frac{Gm^2Mr - \ell^2}{r\sqrt{G^2m^4M^2 + 2m\ell^2E}}\right) - \lim_{\bar{r}\to\infty} \arcsin\left(\frac{Gm^2M\bar{r} - \ell^2}{\bar{r}\sqrt{G^2m^4M^2 + 2m\ell^2E}}\right) \\
&\underset{(+)}{=} \arcsin\left(\frac{Gm^2Mr - \ell^2}{r\sqrt{G^2m^4M^2 + 2m\ell^2E}}\right) - \arcsin\left(\frac{Gm^2M}{\sqrt{G^2m^4M^2 + 2m\ell^2E}}\right)
\end{aligned}
$$

Donde la igualdad destacada por $(\star)$ surge del cálculo para la integral realizado en la parte (d) de la pregunta 3, por otro lado, la igualdad destacada por $(+)$, surge de:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\bar{r}\to\infty} \arcsin\left(\frac{Gm^2M\bar{r} - \ell^2}{\bar{r}\sqrt{G^2m^4M^2 + 2m\ell^2E}}\right) &= \arcsin\left(\lim_{\bar{r}\to\infty} \frac{Gm^2M\bar{r} - \ell^2}{\bar{r}\sqrt{G^2m^4M^2 + 2m\ell^2E}}\right) \\
&= \arcsin\left(\frac{Gm^2M}{\sqrt{G^2m^4M^2 + 2m\ell^2E}}\right)
\end{aligned}
$$

de esta forma, se obtuvo una función de la clase $\theta(r)$, que era una de las cosas solicitadas. Por otra parte, es importante notar que el hecho que $\ell = mdv_0$ y $E = \frac{mv_0^2}{2}$ implica que $\ell^2 = m^2d^2v_0^2$ y $\ell^2 E = \frac{m^3d^2v_0^4}{2}$, de esta forma, es posible dejar finalmente la función $\theta(r)$ en parámetros todos conocidos:

$$
\begin{aligned}
\mp\theta(r) &= \arcsin\left(\frac{Gm^2Mr - \ell^2}{r\sqrt{G^2m^4M^2 + 2m\ell^2E}}\right) - \arcsin\left(\frac{Gm^2M}{\sqrt{G^2m^4M^2 + 2m\ell^2E}}\right) \\
&= \arcsin\left(\frac{Gm^2Mr - m^2d^2v_0^2}{r\sqrt{G^2m^4M^2 + m^4d^2v_0^4}}\right) - \arcsin\left(\frac{Gm^2M}{\sqrt{G^2m^4M^2 + m^4d^2v_0^4}}\right) \\
&= \arcsin\left(\frac{GMr - d^2v_0^2}{r\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right) - \arcsin\left(\frac{GM}{\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right)
\end{aligned}
$$

Ahora, para hallar el punto $\theta_{\text{mín}}$ donde ocurre el mínimo acercamiento (la distancia radial el $r_{\text{mín}}$, ya calculada en la parte (a)), basta evaluar la función recién obtenida en el punto $r = r_{\text{mín}}$, i.e.,

$\theta_{\text{mín}} = \theta(r_{\text{mín}})$, haciendo esto, se llega a:

$$
\begin{aligned}
\mp\theta_{\text{mín}} = \mp\theta(r_{\text{mín}}) &= \arcsin\left(\frac{GMr_{\text{mín}} - d^2v_0^2}{r_{\text{mín}}\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right) - \arcsin\left(\frac{GM}{\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right) \\
&= \arcsin\left(\frac{GM\frac{\sqrt{G^2M^2+d^2v_0^4}-GM}{v_0^2} - d^2v_0^2}{\frac{\sqrt{G^2M^2+d^2v_0^4}-GM}{v_0^2}\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right) - \arcsin\left(\frac{GM}{\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right) \\
&= \arcsin\left(\frac{GM\left(\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4} - GM\right) - d^2v_0^4}{\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}\left(\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4} - GM\right)}\right) - \arcsin\left(\frac{GM}{\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right) \\
&= \arcsin\left(\frac{GM\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4} - G^2M^2 - d^2v_0^4}{G^2M^2 + d^2v_0^4 - GM\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{GM}{\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right) \\
&= \arcsin(-1) - \arcsin\left(\frac{GM}{\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right) = -\arcsin\left(\frac{GM}{\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right) - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

En donde finalmente se puede esclarecer si $\mp \to +$ o $\mp \to -$ ya que previamente debido a la clase de fórmulas presentes no era claro esto, ahora como se tienen los ángulos definidos, se tiene que necesariamente $\mp \to -$, es decir:

$$-\theta_{\text{mín}} = -\arcsin\left(\frac{GM}{\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Lo que lleva finalmente a la extracción del valor de $\theta_{\text{mín}}$, que corresponde a:

$$\theta_{\text{mín}} = \arcsin\left(\frac{GM}{\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right) + \frac{\pi}{2}$$

Ahora, finalmente y como último paso, es importante notar que dada la simetría del problema y la geometría expuesta del mismo, el ángulo buscado corresponde a:

$$\chi = 2\theta_{\text{mín}} - \pi$$

De esta forma es posible calcular que el ángulo de scattering pedido corresponde a:

$$\chi = 2\arcsin\left(\frac{GM}{\sqrt{G^2M^2 + d^2v_0^4}}\right)$$