P1| Control 3

(a)

- Como el sistema va a oscilar forzadamente, la frecuencia no se puede acercar mucho a la frecuencia de resonancia, si lo hace, la amplitud de oscilación va a ser muy grande. y la gente puede saltar y caerse.

(b)

$$m\ddot{y} = -k(y-L) - (Nm+M)g \quad \Big| \quad \text{Equilibrio: } \dot{y} = \ddot{y} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y^* = L + \frac{(Nm+M)}{k} g}$$

(c)

- El carro va a oscilar forzadamente con frecuencia ω y amplitud a, donde

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi v_0}{H} \Rightarrow y_p(t) = a\sin(\omega t)$$

- Ecuación de movimiento:

$$(Nm+M)\ddot{y} = -k(y - L) - c\dot{y} - (Nm+M)g \quad \Big| \quad u = y - L + \frac{(Nm+M)g}{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 a \sin(\omega t)}, \quad \text{donde} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{Nm+M}$$

(d)

- Nos importa la solución de estado estacionario (la particular).
  ↳ Usando $u = A\sin(\omega t)$

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)A = a\omega_0^2 \Rightarrow A = \frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)}$$

(e)

- Antes de hacer el análisis, hay que notar que $A > 0$ si $\omega_0^2 > \omega^2$ y $A < 0$ si $\omega_0^2 < \omega^2$. Por lo que hay que pararse en casos:

1) $\omega^2 < \omega_0^2$:

↳ Se debe cumplir que $A \le \eta\left(L - \frac{g}{\omega_0^2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \le \frac{\eta}{\omega_0^2}\left(L\omega_0^2 - g\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a\omega_0^4}{\eta(L\omega_0^2 - g)} \le \omega_0^2 - \omega^2 \Rightarrow \omega^2 \le \omega_0^2 - \frac{a\omega_0^4}{\eta(L\omega_0^2 - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 v_0^2}{H^2} \le \omega_0^2 - \frac{a\omega_0^4}{\eta(L\omega_0^2 - g)} \Rightarrow \boxed{v_0^2 \le \frac{H^2}{4\pi^2}\left(\omega_0^2 - \frac{a\omega_0^4}{\eta(L\omega_0^2 - g)}\right)}$$

2) $\omega^2 > \omega_0^2$:

↳ Se cumple $-A \le \eta\left(L - \frac{g}{\omega_0^2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{a\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \le \frac{\eta}{\omega_0^2}\left(L\omega_0^2 - g\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a\omega_0^4}{\eta(L\omega_0^2 - g)} \le \omega^2 - \omega_0^2 \Rightarrow \omega^2 \ge \omega_0^2 + \frac{a\omega_0^4}{\eta(L\omega_0^2 - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi v_0^2}{H^2} \ge \omega_0^2 - \frac{a\omega_0^4}{\eta(L\omega_0^2 - g)} \Rightarrow \boxed{v_0^2 \ge \omega_0^2 + \frac{a\omega_0^4}{\eta(L\omega_0^2 - g)}}$$

- O sea que el carro o tiene que ir muy lento (caso 1) o muy rápido (caso 2).

P2

(a)

- Ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) - k(x_1 - x_3)$$
$$m\ddot{x}_2 = k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{x}_3 = k(x_1 - x_3) - k(x_3 - x_2)$$

- Definiendo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$

(b)

$$\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2\omega_0^2 - \omega^2)^3 - 2\omega_0^6 - 3\omega_0^4(2\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{8\omega_0^6} - 12\omega_0^4\omega^2 + 6\omega_0^2\omega^4 - \omega^6 - \cancel{2\omega_0^6} - \cancel{6\omega_0^6} + 3\omega_0^4\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^6 - 6\omega_0^2\omega^4 + 9\omega_0^4\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = 0} \quad \vee \quad \omega^4 - 6\omega_0^2\omega^2 + 9\omega_0^4 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2^2 = \omega_3^2 = 3\omega_0^2}$$

(c)

- Vector propio de $\omega^2 = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vectores propios de $\omega^2 = 3\omega_0^2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_3$$

$\Rightarrow$ Los vectores propios son: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

P3| a) Se tiene $r(\phi) = \dfrac{\ell^2/GMm^2}{1+\epsilon\cos\phi}$

$$\Rightarrow \dot{r}(\phi) = \frac{\ell^2}{GMm^2} \cdot \frac{\epsilon\sin\phi\,\dot{\phi}}{(1+\epsilon\cos\phi)^2} = \frac{\ell^2}{GMm^2} \cdot \frac{\epsilon\sin\phi}{(1+\epsilon\cos\phi)^2} \cdot \frac{\ell}{mr^2}$$

$$= \frac{\ell^2}{GMm^2} \cdot \frac{\epsilon\sin\phi}{(1+\epsilon\cos\phi)^2} \cdot \frac{\ell}{m} \cdot \frac{(1+\epsilon\cos\phi)^2}{\left(\ell^2/GMm^2\right)^2} = \frac{GMm}{\ell}\epsilon\sin\phi$$

Luego la energía es $E = \dfrac{m}{2}\dot{r}^2 + \dfrac{\ell^2}{2mr^2} - \dfrac{GMm}{r}$

$$E = \frac{m}{2} \cdot \frac{G^2M^2m^2}{\ell^2}\epsilon^2\sin^2\phi + \frac{\ell^2}{2m} \cdot \frac{(1+\epsilon\cos\phi)^2}{\left(\ell^2/GMm^2\right)^2} - \frac{GMm(1+\epsilon\cos\phi)}{\ell^2/GMm^2}$$

$$E = \frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2}\epsilon^2 - \frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2}\epsilon^2\cos^2\phi + \frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2} + \frac{G^2M^2m^3}{\ell^2}\epsilon\cos\phi$$

$$+ \frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2}\epsilon^2\cos^2\phi - \frac{G^2M^2m^3}{\ell^2} - \frac{G^2M^2m^3}{\ell^2}\epsilon\cos\phi$$

$$E = \frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2}\epsilon^2 - \frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2} = \frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2}\left(\epsilon^2 - 1\right)$$

b) Para la órbita circular nos damos un radio conocido r_0

$$-mr_0\omega_0^2 = -\frac{GMm}{r_0^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}}$$

El momentum angular de la órbita circular es $\ell_0 = mr_0^2\sqrt{\dfrac{GM}{r_0^3}}$

La energía de la órbita circular es $E_0 = \dfrac{m^2GMr_0}{2mr_0^2} - \dfrac{GMm}{r_0}$

$$E_0 = -\frac{GMm}{2r_0}$$

Cuando la masa del sol baja a la mitad no se ve afectada la velocidad del planeta $\rightarrow$ Se conserva el momentum angular.

La energía queda $E_1 = \dfrac{m^2 G M r_0}{2 m r_0} - \dfrac{G \frac{M}{2} m}{r_0}$

$$E_1 = 0$$

El planeta sigue una órbita parabólica con momentum angular $l = m\sqrt{GMr_0}$ y energía $E = 0$.

Su trayectoria está dada por $r(\phi) = \dfrac{2r_0}{1+\cos\phi}$

Sí escapa de la atracción gravitacional del Sol.