

CONTROL 2 - PAUTA

- P1 | a) El peso de los cuerpos es más pequeño en la medida que uno se acerca al ecuador debido a que la fuerza centrífuga es mayor.

Tomando un SRNI en el centro del planeta, la descripción de un objeto quieto es $\vec{r}' = R\hat{r}'$ $\vec{v}' = 0$ $\vec{a}' = 0$

$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{z} = \Omega(\hat{r}'\cos\theta - \hat{\theta}'\sin\theta) \quad \vec{F} = (N - mg)\hat{r}'$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$$

$$\hookrightarrow \text{en } \hat{r}: 0 = N - mg + m\Omega^2 R \sin^2\theta$$

$$N = mg - m\Omega^2 R \sin^2\theta$$

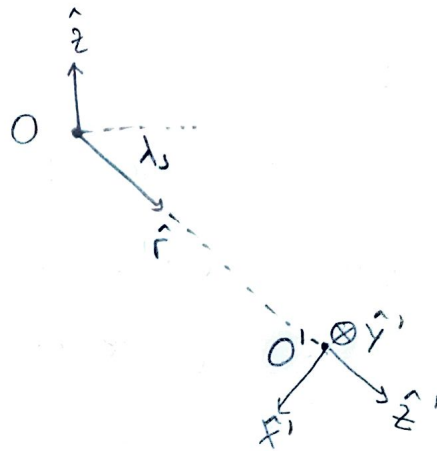
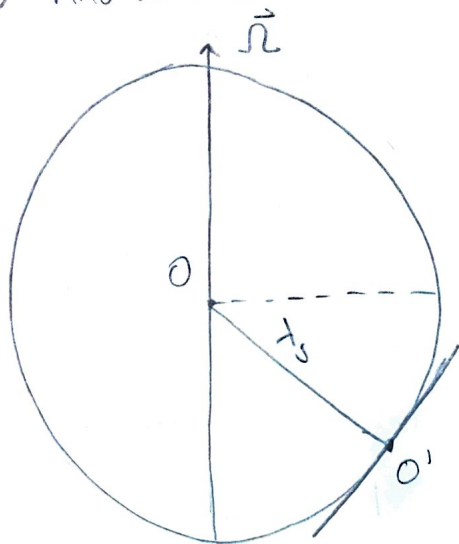
La Normal (que es el peso que se siente) disminuye al acercarse al ecuador

- b) Ahora utilizamos un SR inercial en la Tierra, y un SRNI en el plano, en coord cartesianas. Las fuerzas no inerciales están dadas por $-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}'$, $-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$ y $-m\ddot{\vec{R}}$, mientras que las fuerzas inerciales son $-mg\hat{z}'$ y $N\hat{z}'$.

$$\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} = (-mg + N)\hat{z} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - m\ddot{\vec{R}}$$

Realizando la aproximación $\Omega^2 \ll 1$ ignoramos los últimos dos términos. Con esto concluimos que todas las fuerzas que actúan sobre el objeto son ortogonales a su movimiento en el plano XY. Por lo tanto, la rapidez del objeto es constante

c) Ahora extraemos a matraquear ...



Tenemos $\vec{r}' = x\hat{x}' + y\hat{y}'$; $\vec{v}' = \dot{x}\hat{x}' + \dot{y}\hat{y}'$; $\vec{a}' = \ddot{x}\hat{x}' + \ddot{y}\hat{y}'$

$$\vec{F} = -mg\hat{z}' + N\hat{z}'$$

$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{z} = \Omega(-\hat{x}'\cos\lambda_s - \hat{z}'\sin\lambda_s)$$

$$\vec{\Omega} \times \vec{v}' = \Omega\dot{y}\sin\lambda_s\hat{x}' - \Omega\dot{x}\sin\lambda_s\hat{y}' - \Omega\dot{y}\cos\lambda_s\hat{z}'$$

Las ecuaciones de movimiento quedan

$$\hat{x}' | m\ddot{x} = -2m\Omega\sin\lambda_s \dot{y}$$

$$\hat{y}' | m\ddot{y} = 2m\Omega\sin\lambda_s \dot{x}$$

$$\hat{z}' | m\ddot{z} = N - mg + 2m\Omega\dot{y}\cos\lambda_s$$

Claramente la trayectoria no es una recta, porque sufre aceleración en todas las direcciones, y las ecuaciones de movimiento están acopladas. En $(\hat{x}')$ e $(\hat{y}')$ vemos que cuando hay velocidad en y se produce una aceleración negativa en x , lo que genera una velocidad negativa en x , causando una aceleración negativa en y ... Siguiendo este razonamiento concluimos que la trayectoria es algún tipo de elipse, círculo o roseta. Ya que la constante que acopla ambas ecuaciones es la misma ($2\Omega\sin\lambda_s$), el resultado es un círculo.

* No se espera que resuelvan las EDOs acopladas, pero sí que interpreten el problema en base a las EDOs planteadas.

Primero, podemos observar que la constante que acopla las EDOs tiene unidades de $[s^{-1}]$. En base a esto, una hipótesis razonable para responder (e) es que el tiempo que tarda en regresar es $\frac{1}{2\Omega \sin \lambda_s} \approx \frac{1}{2 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{2}} [s]$

$$\approx 0,15 \cdot 10^5 [s]$$

Para (d): Dado que las aceleraciones están caracterizadas por $2\Omega \sin \lambda_s$, una hipótesis razonable para el radio del círculo descrito es $\frac{V_0}{2\Omega \sin \lambda_s}$; con V_0 la velocidad inicial. Para encontrar

la velocidad máxima imponemos $\frac{V_0}{2\Omega \sin \lambda_s} \leq 0,6 \text{ Km}$

$$V \leq 2 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot 0,6 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2} [ms^{-1}]$$

$$V_{\max} \approx 3,5 \cdot 10^{-2} [ms^{-1}]$$

* Ahora viene la solución analítica. Definiendo $z = x + iy$ obtenemos la EDO

$$\ddot{z} = 2\Omega \sin \lambda_s (-\dot{y} + i\dot{x}) = 2\Omega \sin \lambda_s \cdot i \cdot \dot{z}$$

El polinomio característico es $\alpha^2 - 2i\Omega \sin \lambda_s \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
 $\alpha = 2i\Omega \sin \lambda_s$

la solución es de la forma $z(t) = z_0 e^{2i\Omega \sin \lambda_s t}$

Recordando la representación polar de los números complejos

podemos reconocer que $z(t)$ describe una circunferencia,
por lo tanto el objeto describe una circunferencia en el plano.

Para que el objeto vuelva al punto de partida $2\Omega \sin \lambda_s \cdot t = 2\pi$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{\Omega \sin \lambda_s} \approx 0,6 \cdot 10^5 [\text{s}]$$

La rapidez del objeto es $|\dot{z}(t)| = 2\Omega \sin \lambda_s \cdot z_0$

y para que permanezca en el parque O'Higgins necesitamos que

$$z_0 \leq 0,6 \text{ km} \Rightarrow |\dot{z}(t)| \leq 2 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 10^3 [\text{m s}^{-1}]$$

$$v_{\text{max}} \approx 3.5 \cdot 10^{-2} [\text{m s}^{-1}]$$

P2 |

(a) $\vec{F} = -F_0 (y \hat{i} + x \hat{j})$

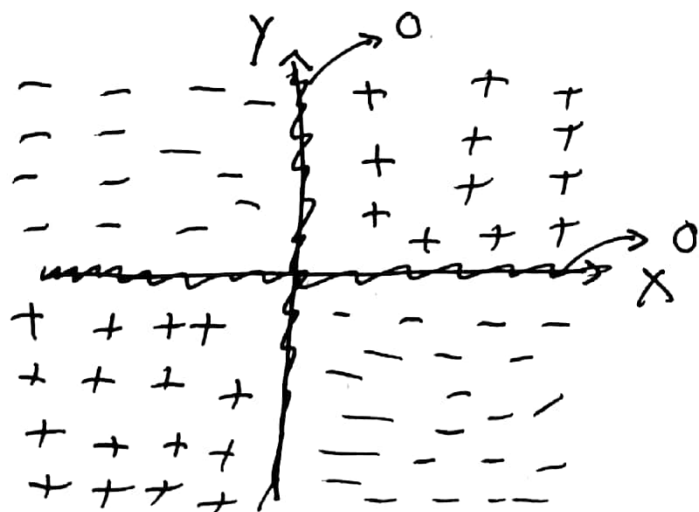
• Para que $\vec{F}$ sea conservativa, las derivadas cruzadas deben ser iguales: $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = -F_0 \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} = -F_0 \end{cases} \rightarrow \text{son iguales!} \Rightarrow \vec{F} \text{ es conservativa.}$

(b)

• Se propone el potencial $V(x, y) = F_0 xy$ el cual cumple:

$\nabla V = \begin{pmatrix} F_0 y \\ F_0 x \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla V$ ✓✓



$\rightarrow$ Si $F_0 > 0$, Si $F_0 < 0$
los signos se invierten.
Si $F_0 = 0$, todo el
plano $\{x, y\}$ es 0

(c) use $\phi = \theta$

• En polares: $V(\phi) = F_0 R^2 \cos \theta \sin \theta = \frac{R^2 F_0}{2} \sin(2\theta)$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} = F_0 R \cos(2\theta) \hat{\phi} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi + 2n\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\theta = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}}$$

• Segunda derivada para analizar estabilidad:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = -2F_0 R^2 \sin(2\phi) \quad \left| \text{Evaluando en el equilibrio.} \right.$$

$$= -2F_0 R^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

$$= -2F_0 R^2 \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(n\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(n\pi) \right] \xrightarrow{(-1)^n} 0$$

$$= -2F_0 R^2 (-1)^n$$

$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} + n\pi$ es estable si n es impar e
inestable si n es par

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \phi &= \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \text{ son } \text{estables} \\ \phi &= \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\} \text{ son inestables.} \end{aligned}}$$

P3)

(a)

$$V(\theta) = mg(d-R) \cos \theta + kR^2 \theta^2$$

$$\frac{dV}{d\theta} = -mg(d-R) \sin \theta + 2kR^2 \theta$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -mg(d-R) \cos \theta + 2kR^2$$

• Estable ssi $\left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} > 0$

$$\Rightarrow 2kR^2 - mg(d-R) > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{2kR^2}{mg} + R > d}$$

• Para calcular ω usamos la energía ~~en~~ total:

$$E = \frac{1}{2} m (R^2 + d^2) \dot{\theta}^2 + mg(d-R) \cos \theta + kR^2 \theta^2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Taylor} \\ \text{en torno a } 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m (R^2 + d^2) \dot{\theta}^2 + mg(d-R) \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2\right) + kR^2 \theta^2$$

• $\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m(R^2 + d^2) \cancel{\dot{\theta}} \ddot{\theta} - mg(d-R) \cancel{\theta} \dot{\theta} + 2kR^2 \cancel{\theta} \dot{\theta} = 0$

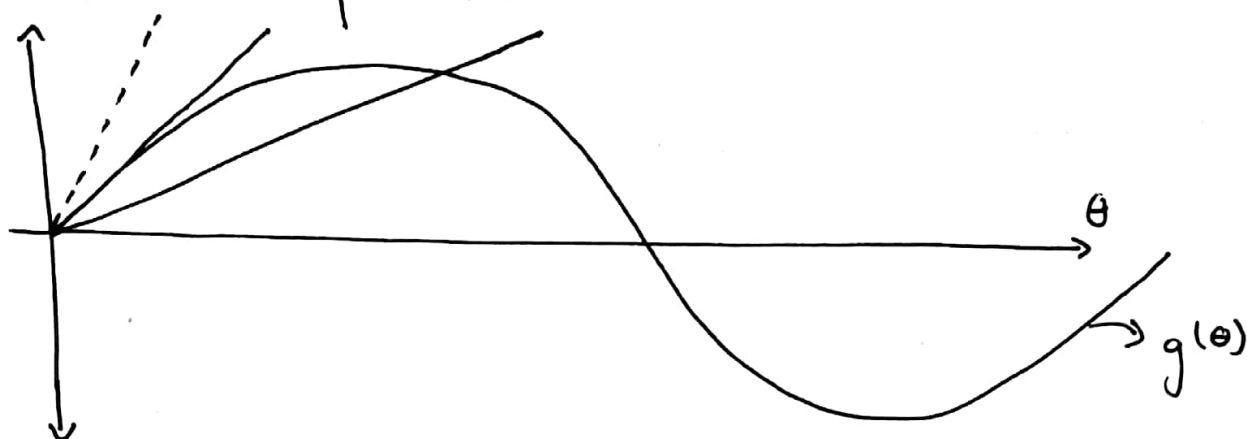
$$\Rightarrow \ddot{\theta} = - \underbrace{\left[\frac{2kR^2 - mg(d-R)}{m(R^2 + d^2)} \right]}_{\omega_0^2} \theta$$

(b)

- Las equilibrios se encuentran en $\frac{dV}{d\theta} = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2kR^2\theta}_{f(\theta)} = \underbrace{mg(d-R)\sin\theta}_{g(\theta)}$$

- Graficando posibles funciones (con distintos k):



↳ Dependiendo de la relación $\frac{2kR^2}{mg(d-R)}$ hay 1 o 3 intersecciones (si θ^* es intersección, $-\theta^*$ también lo es).

- Para que el problema tenga sentido, se necesita que $\theta^* \in (0, \frac{\pi}{2}]$, por lo que se debe cumplir que:

$$2kR^2 \cdot \frac{\pi}{2} \geq mg(d-R) \Rightarrow \boxed{\frac{kR^2\pi}{mg} + R > d}$$

- La pendiente de la recta en $\theta = 0$ debe ser como mucho igual a la pendiente de la senoide:
 $\Rightarrow 2kR^2 \leq mg(d-R) \Rightarrow \boxed{\frac{2kR^2}{mg} + R < d}$

se cumplen simultáneamente

$\therefore$ se necesita que $\theta = 0$ sea un eq. inestable y como $V(\theta) \in \mathbb{R}$ y no pueden haber dos máximos seguidos θ^* es eq. estable