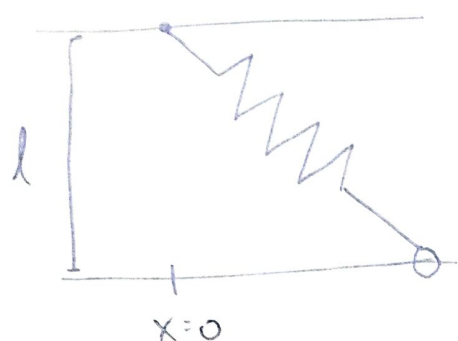


P11



El largo del resorte

$$\text{es } L = \sqrt{l^2 + x^2}$$

La energía potencial del sistema es

$$U(x) = \frac{1}{2} K (\sqrt{l^2 + x^2} - D)^2$$

Encontramos equilibrio $U'(x_{eq}) = 0$

$$U'(x) = \frac{K (\sqrt{l^2 + x^2} - D)}{\sqrt{l^2 + x^2}} \cdot x = Kx - \frac{KDx}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

Imponiendo equilibrio $x_1 = 0$

$$x_{2,3} = \pm \sqrt{D^2 - l^2}$$

Analizamos estabilidad

$$U''(x_{eq}) \geq 0$$

↳ Notar que no existe para $D < l$

$$U''(x) = K - \frac{KD}{\sqrt{l^2 + x^2}} + \frac{KDx^2}{(l^2 + x^2)^{3/2}}$$

Evaluando en equilibrios

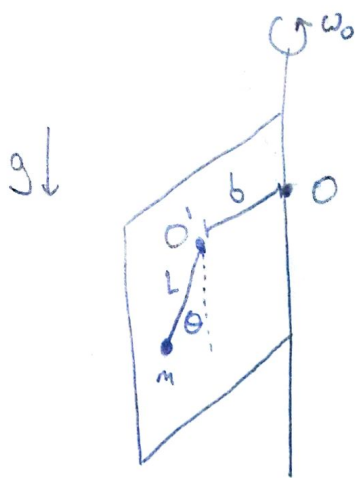
$$U''(x_1) = K - \frac{KD}{l} \rightarrow \text{Estable si } l > D$$

$$\text{Frecuencia } \omega_1^2 = \frac{1}{m} \cdot K \left(\frac{l-D}{l} \right)$$

$$U''(x_{2,3}) = \frac{KD(D^2 - l^2)}{D^3} \rightarrow \text{Estable si } D > l$$

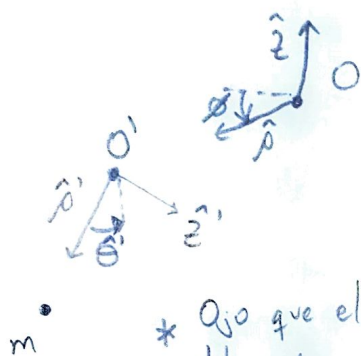
$$\text{Frecuencia } \omega_{2,3}^2 = \frac{1}{m} \cdot \frac{K}{D^2} (D^2 - l^2)$$

P21



Utilizamos coordenadas cilíndricas inerciales $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}\}$ con $\hat{z}$ hacia arriba, y $\hat{\rho}$ hacia el origen del péndulo.

Utilizamos coordenadas cilíndricas no inerciales $\{\hat{\rho}', \hat{\theta}', \hat{z}'\}$ centradas en O' , con $\hat{\rho}'$ apuntando hacia la masa, y $\hat{z}'$ perpendicular a la puerta.



* Queda que el theta dibujado aquí es negativo

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= -\hat{\rho}' \sin \theta - \hat{\theta}' \cos \theta \\ \hat{\phi} &= \hat{z}' \\ \hat{z} &= -\hat{\rho}' \cos \theta + \hat{\theta}' \sin \theta \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Transformaciones} \\ \text{entre sistemas} \\ \text{de coordenadas} \end{array} \right.$$

$$\vec{r}' = L \hat{\rho}' \quad \vec{v}' = L \dot{\theta} \hat{\theta}'$$

$$\vec{a}' = -L \ddot{\theta} \hat{\rho}' + L \ddot{\theta} \hat{\theta}'$$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= b \hat{\rho} \quad \ddot{\vec{R}} = -b \omega_0^2 \hat{\rho} \\ \ddot{\vec{R}} &= b \omega_0^2 (\sin \theta \hat{\rho}' + \cos \theta \hat{\theta}') \end{aligned}$$

$$\vec{\Omega} = \omega_0 \hat{z} = \omega_0 (-\cos \theta \hat{\rho}' + \sin \theta \hat{\theta}')$$

$$\vec{\Omega} \times \vec{r}' = \omega_0 L \dot{\theta} [(-\cos \theta \hat{\rho}' + \sin \theta \hat{\theta}') \times \hat{\theta}'] = -\omega_0 L \dot{\theta} \cos \theta \hat{z}'$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') &= \omega_0^2 L [(-\cos \theta \hat{\rho}' + \sin \theta \hat{\theta}') \times ((-\cos \theta \hat{\rho}' + \sin \theta \hat{\theta}') \times \hat{\rho}')] \\ &= -\omega_0^2 L \sin \theta [(-\cos \theta \hat{\rho}' + \sin \theta \hat{\theta}') \times \hat{z}'] \\ &= -\omega_0^2 L \sin \theta [\sin \theta \hat{\rho}' + \cos \theta \hat{\theta}'] \end{aligned}$$

$$\vec{F} = -mg \hat{z} + N \hat{\phi} - T \hat{\rho}'$$

$$= (mg \cos \theta - T) \hat{\rho}' - mg \sin \theta \hat{\theta}' + N \hat{z}'$$

Ahora podemos plantear la ecuación dinámica en sistemas no inerciales

$$m\ddot{\mathbf{a}}' = \ddot{\mathbf{F}} - m\ddot{\mathbf{R}} - 2m\dot{\mathbf{R}} \times \dot{\mathbf{r}}' - m\dot{\mathbf{R}} \times (\dot{\mathbf{R}} \times \dot{\mathbf{r}}')$$

$$\hat{r}' \mid -mL\ddot{\theta} = mg \cos \theta - T - mb\omega_0^2 \sin \theta + mL\omega_0^2 \sin^2 \theta$$

$$\hat{\theta}' \mid mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - mb\omega_0^2 \cos \theta + mL\omega_0^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\hat{z}' \mid 0 = N + 2mL\omega_0 \dot{\theta} \cos \theta$$

a) De $(\hat{\theta}')$ obtenemos la ecuación de movimiento para θ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta + \omega_0^2 \cos \theta \left(\frac{b}{L} - \sin \theta \right) = 0$$

Al imponer $\ddot{\theta} \stackrel{!}{=} 0$ para encontrar equilibrios, obtenemos una ecuación sin solución analítica. Analizaremos el caso $\omega_0^2 \gg g/L$, con ec de movimiento

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cos \theta \left(\frac{b}{L} - \sin \theta \right) = 0$$

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\left| \frac{b}{L} - \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta_3 = \frac{b}{L} \right.$$

Hacemos Taylor

$$\cos\left(\pm \frac{\pi}{2} + \epsilon\right) \approx -\sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \cdot \epsilon$$

$$\sin\left(\pm \frac{\pi}{2} + \epsilon\right) \approx \pm 1$$

$$\ddot{\epsilon} \mp \omega_0^2 \epsilon \left(\frac{b}{L} \mp 1 \right) = 0$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ estable si } \frac{b}{L} - 1 < 0$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{b}{L} \right)$$

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{2} \text{ siempre es estable}$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{b}{L} \right)$$

* solo existe si $L > b$

$$\text{Taylor } \cos(\theta_3 + \epsilon) \approx \cos \theta_3 - \sin \theta_3 \cdot \epsilon$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{b}{L}\right)^2} - \frac{b}{L} \cdot \epsilon$$

$$\sin(\theta_3 + \epsilon) \approx \sin \theta_3 + \cos \theta_3 \cdot \epsilon$$

$$= \frac{b}{L} + \sqrt{1 - \left(\frac{b}{L}\right)^2} \epsilon$$

$$\ddot{\epsilon} + \omega_0^2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b}{L}\right)^2} - \frac{b}{L} \epsilon \right] \left[-\sqrt{1 - \left(\frac{b}{L}\right)^2} \epsilon \right] = 0$$

$$\ddot{\epsilon} - \omega_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{L}\right)^2} \epsilon = 0$$

$$\theta_3 \text{ siempre inestable}$$

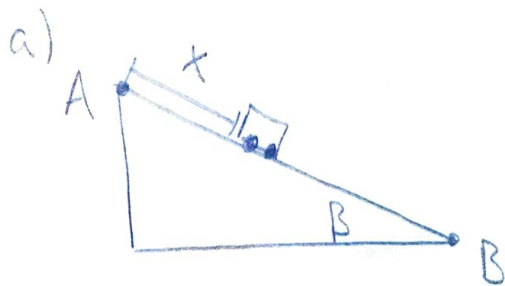
b) Notemos que se pregunta por una posición solamente, sin tomar en cuenta la velocidad. $\rightarrow \dot{\theta} = 0$

$$N = -2mL\omega_0 \dot{\theta} \cos \theta = 0$$

La normal es nula para toda posición (siempre y cuando el péndulo esté quieto $\dot{\theta} = 0$)

P3) $x(t) = L \sin\left(\frac{\pi}{2T} t\right)$

$\dot{x}(t) = \frac{L\pi}{2T} \cos\left(\frac{\pi}{2T} t\right)$



Energía en A $\rightarrow t=0$

$$E_A = \frac{1}{2} m \dot{x}(0)^2 - mg x(0) \cdot \sin \beta$$

Energía en B $\rightarrow t=T$

$$E_B = \frac{1}{2} m \dot{x}(T) - mg x(T) \cdot \sin \beta$$

El trabajo realizado es

$$W_{A \rightarrow B} = E_B - E_A$$

$$= -mgL \sin \beta - \frac{1}{2} m \frac{L^2 \pi^2}{4T^2}$$

b) Trabajo realizado por fuerza de roce es

$$W_{\text{roce}} = \int -c \cdot \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

El camino recorrido es parametrizado por $x(t) \cdot \hat{x}$

$$\hookrightarrow d\vec{r} = \frac{d}{dt}(x(t)) \hat{x} \cdot dt$$

La velocidad es $\vec{v} = \dot{x}(t) \hat{x}$

$$W_{\text{roce}} = \int_0^T -c \cdot \left[\frac{L\pi}{2T} \cos\left(\frac{\pi}{2T} t\right) \right]^2 dt = -c \left(\frac{L\pi}{2T} \right)^2 \int_0^T \frac{\cos\left(\frac{\pi}{T} t\right) + 1}{2} dt$$

$$= -\frac{c\pi^2 L^2}{8T^2}$$

c) Para un instante t la energía del sistema será $E(t) = \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - mg x(t) \sin \beta$

El trabajo realizado por el roce será

$$W_{\text{roce}}(t) = -c \left(\frac{L\pi}{2T} \right)^2 \int_0^t \frac{\cos\left(\frac{\pi}{T} t\right) + 1}{2} dt$$

Con lo que el trabajo realizado por el motor es

$$E(t) - E_A = W_{ROCE}(t) + W_{MOTOR}(t)$$

$$W_{MOTOR}(t) = \frac{m}{2} \left(\frac{L\pi}{2T} \right)^2 \left[\cos^2 \left(\frac{\pi}{2T} t \right) - 1 \right] - mgL \sin \left(\frac{\pi}{2T} t \right) \sin \beta \\ + c \left(\frac{L\pi}{2T} \right)^2 \left[\frac{I}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{T} t \right) + t \right]$$