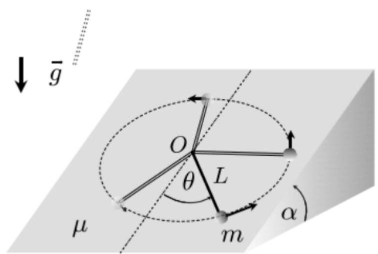
1. Una partícula de masa m se encuentra unida a un extremo de una barra de largo L y masa despreciable. La barra puede rotar en torno al punto fijo O sobre un plano inclinado como se muestra en la figura. El coeficiente de roce cinético entre la partícula y el plano es μ. Se quiere determinar la rapidez mínima que es necesaria dar a la partícula para que esta realice una vuelta en torno al punto O.



Antes de comenzar el problema, es necesario definir el sistema de coordenadas que se utilizará, este es un eje de coordenadas cilíndricas con origen en O y vectores unitarios $\hat{\rho}$ que apunta en dirección de la masa que gira, $\hat{\theta}$ que apunta en dirección de la velocidad de la masa y $\hat{k}$ definido como $\hat{\rho} \times \hat{\theta}$. Para resolver el problema, sin pérdida de generalidad, se supone que la masa rota en sentido antihorario. Este sistema de referencia está inclinado en un ángulo α respecto a la horizontal. El ángulo θ se mide desde el punto más bajo de la trayectoria de la masa.

Al realizar la sumatoria de fuerzas sobre la masa queda lo siguiente:

$$\sum_i \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_r \tag{1}$$

El largo de la barra que sostiene a la partícula es constante y se supone que el plano es inercial, por lo que la trayectoria de la partícula seguirá al vector $\hat{\theta}$. Para calcular el trabajo ejercido sobre la masa, necesitamos conocer las fuerzas no inerciales que actuan sobre la masa en el sentido del movimiento. Proyectando 1 sobre el vector $\hat{\theta}$ resulta:

$$\sum_i \vec{F} \cdot \hat{\theta} = \vec{F}_g \cdot \hat{\theta} + \vec{F}_r \cdot \hat{\theta}$$

La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, por lo tanto no ejerce un trabajo sobre la masa, su acción será considerada como energía potencial de la partícula. Esto deja que la fuerza de roce es la única fuerza que ejerce trabajo sobre la partícula. La fuerza de roce puede escribirse como $\vec{F}_r = -\mu N \hat{\theta}$, con N la norma de la fuerza normal $N = mg\cos(\alpha)$. Esto resulta en:

$$\vec{F}_r = -\mu mg\cos(\alpha)\hat{\theta} \tag{2}$$

oEste problema se resolverá en 2 partes por separad, analizando la trayectoria de la masa con θ desde 0 hasta π y desde π a 2π. Primero se determinará la velocidad inicial v_0 que debe tener la partícula para que luego en $\theta = \pi$ (el punto más alto de la trayectoria) tenga una velocidad v_π. Luego se determinará la velocidad v_π que debe tener en $\theta = \pi$ para que la velocidad final v_f en $\theta = 2\pi$

sea igual a 0, que es la condición de velocidad mínima (si se lanza con mayor o menor velocidad no se logrará el objetivo, pues no llegaría a $\theta = 2\pi$ o en ese punto tendría una velocidad mayor a 0). Al resolver esto, se mostrará que la condición de v_f no es siempre cierta y se determinarán las velocidades iniciales según distintos casos.

Para establecer una referencia de energía potencial, diremos arbitrariamente que el punto más bajo de la trayectoria de la masa m tendrá energía potencial $U_0 = 0$. Además, tendrá energía cinética $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Utilizando un análisis trigonométrico se deduce que en el punto más alto de la trayectoria, tendrá energía potencial $U_\pi = 2mgL\sin(\alpha)$ y tendrá energía cinética $K_\pi = \frac{1}{2}mv_\pi^2$. Como existe una relación entre la diferencia de energía en 2 puntos y el trabajo realizado sobre la partícula entonces se tiene que:

$$\Delta E = W \tag{3}$$

$$K_\pi + U_\pi - K_0 - U_0 = \int_c \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} \tag{4}$$

Al parametrizar la curva por una circunferencia descrita en cordenadas polares, se tiene que $d\vec{s} = \hat{\theta} \cdot Ld\theta$. Entonces al reemplazar todos los valores correspondientes en 4, con la fuerza de roce la única fuerza no conservativa que ejerce trabajo con valor calculado en 2, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{1}{2}mv_\pi^2 + 2mgL\sin(\alpha) - \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = \int_0^\pi -\mu mg\cos(\alpha)Ld\theta$$

Despejando, se obtiene:

$$v_\pi^2 = -4gL\sin(\alpha) - 2\pi\mu gL\cos(\alpha) + v_0^2 \tag{5}$$

De esta expresión se desprende una condición importante para resolver el problema. Existe una velocidad inicial mínima para que la partícula llegue al punto más alto de la trayectoria, de ser una velocidad menor a esta, este punto no es alcanzado y la partícula no logra dar una vuelta completa o lo alcanza y queda estático en $\theta = \pi$. Despejando v_0^2 de 5 y analizándola, se obtiene:

$$v_0^2 > 4gL\sin(\alpha) + 2\pi\mu gL\cos(\alpha) \tag{6}$$

La condición deducida en 6 tiene un buen sentido físico. Al aumentar el ángulo de inclinación α, aumenta la velocidad inicial que debe tener la partícula para llegar al punto superior de la trayectoria, mientras que disminuye el efecto de la fuerza de roce, pues la normal en menor. Además, se tiene que al aumentar el coeficiente de roce aumenta la velocidad inicial que debe tener la partícula, pues perderá mayor velocidad en el trayecto.

Luego, para calcular la velocidad v_π mínima que debe tener la partícula en $\theta = \pi$ para que esta logre llegar a $\theta = 2\pi$ se impone que $v_f = 0$ (condición que luego se analizará más a detalle). Utilizando la relación 3 otra vez, solo que esta vez integrando entre π y 2π, se obtiene:

$$K_f + U_f - K_\pi - U\pi = W$$

$$-\frac{1}{2}mv_\pi^2 - 2mgL\sin(\alpha) = \int_\pi^{2\pi} -\mu mg\cos(\alpha)Ld\theta \tag{7}$$

Luego, despejando v_π^2 de 7, se obtiene:

$$v_\pi^2 = 2\pi\mu gL\cos(\alpha) - 4gL\sin(\alpha) \tag{8}$$

Es fácil notar que 5 y 8 son equivalentes, por lo que reemplazando v_π resulta:

$$-4gL\sin(\alpha) - 2\pi\mu gL\cos(\alpha) + v_0^2 = 2\pi\mu gL\cos(\alpha) - 4gL\sin(\alpha)$$

Despejando v_0^2 se obtiene:

$$v_0^2 = 2\pi\mu gL\cos(\alpha) + 2\pi\mu gL\cos(\alpha) \tag{9}$$

Respecto a 9, se puede notar que si α tiende a $\pi/2$, la velocidad inicial con la que se debe ir la partícula va disminuyendo y en el caso extremo, tiende a 0. Este resultado no tiene sentido, puesto que en $\alpha = pi/2$ se necesita que la velocidad inicial sea mayor a 0. Esto es porque no se está considerando la condición 6 establecida anteriormente, que para este caso impone que:

$$2\pi\mu gL\cos(\alpha) > 4gL\sin(\alpha) \tag{10}$$

Resolviendo esta desigualdad, resulta que el resultado obtenido en 9 sólo es válido para $\alpha \in [0, \arctan(\frac{\pi\mu}{2}))$. En otras palabras, es falso imponer que $v_f = 0$ cuando $\alpha \in [\arctan(\frac{\pi\mu}{2}), \pi/2]$. Para este último caso, es necesario que la bolita tenga más velocidad que aquella que perderá por causa del trabajo realizado por el roce, resultando que cuando esta llegue a $\theta = 2\pi$ tenga velocidad no nula.

Entonces la velocidad inicial mínima de la partícula para que esta de una vuelta completa estará dividida en 2 casos:

$$v_0 = \begin{cases} \sqrt{4\pi\mu gL\cos(\alpha)}, \alpha \in [0, \arctan(\frac{\pi\mu}{2})) \\ \sqrt{4gL\sin(\alpha) + 2\pi\mu gL\cos(\alpha)} + \epsilon, \alpha \in [\arctan(\frac{\pi\mu}{2}), \pi/2] \end{cases}$$

Con $\epsilon \to 0$.

Pregunta 2

(a)

Esta subsección la dividiremos en 3

(a.1) Momentum Lineal del sistema

Para esto, primero calcularemos la posición de la cuña y el patinador. Tenemos que el sistema se mueve de la siguiente manera de acuerdo al presente esquema:

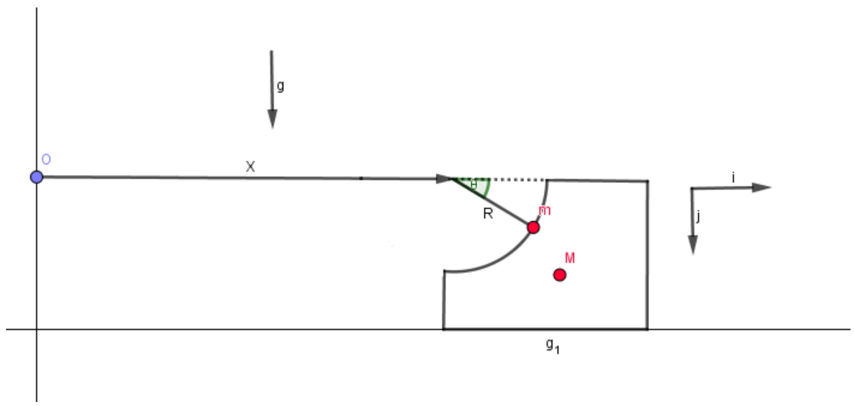


Figura 2: En el siguiente esquema se puede ver que escogemos el origen en un punto O asociado a un punto en reposo y altura conocida (R si se quiere). El radio de la circunferencia en la cuña es R y su desplazamiento horizontal es x, el ángulo que se mueve el patinador a lo largo de la cuña es θ y el sentido de los vectores unitarios cartesianos con los que se trabajaran estarán en el dibujado en el esquema, es decir, la cordenada y será positiva en el sentido que actúa la gravedad.

Ahora dado lo anterior se tiene que:
(1) Posición de la cuña respecto al origen O

$$\vec{r_M}(t) = x\hat{i}$$

Por lo tanto:
(2) Velocidad de la cuña respecto al origen O

$$\dot{\vec{r_M}}(t) = \dot{x}\hat{i}$$

(3) Posición del patinador respecto al origen O

$$\vec{r_m}(t) = (x + Rcos(\theta))\hat{i} + (Rsen(\theta)\hat{j}$$

Por lo tanto:
(4) Velocidad del patinador respecto al origen O

$$\dot{\vec{r_m}}(t) = (\dot{x} - R\dot{\theta}sen(\theta))\hat{i} + (R\dot{\theta}cos(\theta))\hat{j}$$

Por la definición de momentum lineal, este último se puede escribir, para ese sistema como:
(5)
$$\vec{p}(t) = ((M+m)\dot{x} - mR\dot{\theta}sen(\theta))\hat{i} + (mR\dot{\theta}cos(\theta))\hat{j}$$
Algo interesante que podemos notar, es que el momentum en el eje x se conserva ya que no hay fuerzas externas actuando en el sistema sobre ese eje, y es cero ya que el sistema se encuentra en reposo respecto a O, esto es: (6)
$$p_x = (M+m)\dot{x} - mR\dot{\theta}sen(\theta) = 0$$
Esto nos será útil más adelante.

(a.2) Energía cinética del sistema

De la definición, es directo saber que la energía cinética se escribe como:
$$K_{total} = K_{patinador} + K_{cuña} = \frac{m}{2}\dot{r_m}^2 + \frac{M}{2}\dot{r_M}^2$$
Donde $\dot{r_m}^2$ y $\dot{r_M}^2$ Son los módulos de la velocidad del patinador y la cuña, al cuadrado.
De (2) y de (4) tenemos que los módulos de las velocidades al cuadrado son:
(7)
$$\dot{r_m}^2 = \dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{\theta}\dot{x}sen(\theta)$$
(8)
$$\dot{r_M}^2 = \dot{x}^2$$
Luego, la energía cinética se escribe como: (9)
$$K_{total} = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - mR\dot{\theta}\dot{x}sen(\theta)$$

(a.3) Energía potencial del sistema

Para calcular la energía potencial del sistema debemos considerar lo siguiente: 1) Dado el esquema, la dirección de la gravedad será positiva, es decir, $m\vec{g} = mg\hat{j}$ 2)En vez del tiempo, parametrizaremos la posición de la partícula en función del ángulo recorrido y haremos que $V(\theta = 0) = mgR$ para tenerlo como potencial de referencia. Luego como $\vec{r_m} = (x + Rcos(\theta))\hat{i} + (Rsen(\theta)\hat{j}$ entonces:
$$\frac{d(\vec{r_m}}{d\theta} = (\frac{dx}{d\theta} - Rsen(\theta))\hat{i} + (Rcos(\theta)\hat{j}$$
Por definición, la energía potencial en función del ángulo estará dada por:
$$V(\theta) = -\int_0^\theta m\vec{g}\cdot\frac{d(\vec{r_m})}{d\theta}d\theta + mgR$$
Desarrolalndo: (10)
$$V(\theta) = mgR(1 - sen(\theta))$$
La razón por la cual calculamos solamente el potencial del patinador es porque la cuña no se mueve en la dirección de alguna fuerza a la que s ele pueda asociar una energía potencial, en cambio al patinador si, por eso, es conveneite escribir solamente la energía potencial del patinador y establecer que esa es la energía potencial del sistema completo.

(b)

ahora, como sabemos, sobre el sistema las úmicas fuerzas que realizan trabajo son conservativa, por lo que podemos decir con todad propiedad que la energía se conserva en este problema. Ahora bien sabemos que dado que el sistema parte del reposo:

$$K_{inicial} = 0$$

y dado que el ángulo inicial vale $\theta = 0$ se tiene que:

$$V_{inicial} = mgR$$

Ahora, cuando el ángulo es $\theta = \frac{\pi}{2}$, que es cuando el patinador se separa de la cuña, se tiene que, dadas las expresiones (9) y (10):

$$K_{final} = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2(\theta = \frac{\pi}{2}) + \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - mR\dot{\theta}\dot{x}(\theta = \frac{\pi}{2})$$

y

$$V_{final} = 0$$

Por conservación de la energía, se tiene que:

$$mgR = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2(\theta = \frac{\pi}{2}) + \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - mR\dot{\theta}\dot{x}(\theta = \frac{\pi}{2})$$

Ahora, de la conservación de momentum podemos obtener que:

$$\dot{x}(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{m}{m+M}R\dot{\theta}$$

Ocupando esto se tiene una expresión para $\dot{theta}$:

$$mgR = \frac{m^2}{2(m+M)}R^2\dot{\theta}^2 - \frac{m^2}{(m+M)}R^2\dot{\theta}^2 + \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2}$$

Luego, $\dot{\theta}$ en $\frac{\pi}{2}$ es igual a:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g(m+M)}{M}}$$

Esto, lo podemos usar en la epresión (2), reemplazando $\theta = \frac{\pi}{2}$ se tiene que la velocidad respecto al origen O es

$$\dot{\vec{r_m}} = -\sqrt{\frac{2gMR}{(m+M)}}\hat{i}$$

Y respecto a la cuña es:

$$V_{res/cuña} = \dot{\vec{r_m}} - \dot{\vec{r_M}} = -\sqrt{\frac{2gR(m+M)}{M}}\hat{i}$$

(c)

El desplazamiento que sufrio la cuña entre el instante inicial y el momento que el patinador deja la rampa estará dado por la integral de su velocidad respecto al tiempo, es decir:

$$
\begin{aligned}
d &= \int_0^{t^*} \dot{r_M}(t)dt \\
&= \int_0^{t^*} \dot{x}dt && \text{/Remplazando } \dot{x} \text{ de la conservación de momentum} \\
&= \int_0^{t^*} sin(\theta)\dot{\theta}\frac{Rm}{M+m}dt && \text{/Haciendo el cambio de variable } \theta = \theta(t) \\
&= \frac{Rm}{M+m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(\theta)d\theta \\
&= \frac{Rm}{M+m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(\theta)d\theta \\
&= \frac{Rm}{M+m}
\end{aligned}
$$

Por lo que cuando salga de la rampa se habrá desplazado $d = \frac{Rm}{M+m}$