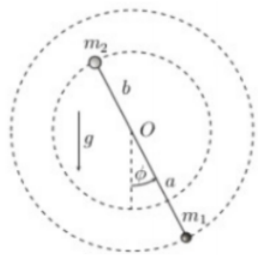
Soluciones
Guía de Problemas 4

FI2001-6 Mecánica
Profesor: Francisco Brieva Rodríguez
Auxiliares: Esteban Aguilera Marinovic
Joaquín Medina Dueñas

Pregunta 1

Una barra rígida ideal sin masa de largo $L = a + b$ puede girar en un plano vertical en torno a un punto fijo O que separa a la barra en un brazo de largo a y otro de largo b. En los extremos de la barra hay unas partículas de masas m_1 y m_2.



$\vec{r}_1 = a\ \hat{\rho} \Rightarrow \vec{v}_1 = a\ \dot{\phi}\ \hat{\phi}$ // $\vec{r}_2 =$ -$b\ \hat{\rho} \Rightarrow \vec{v}_2 =$ -$b\ \dot{\phi}\ \hat{\phi}$

(Tomaremos $m_1 = m$ y $m_2 = M$)

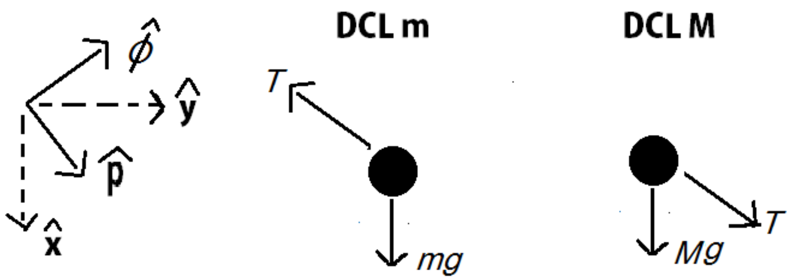
(a)

Determine el momento angular y el torque del sistema con respecto al punto O.

Primero debes encontrar el momento angular de cada particula:
$l_1 = a\ \hat{\rho}$ x $a\ \dot{\phi}\ m\ \hat{\phi} = a^2\ \dot{\phi}\ m\ \hat{k}$
$l_2 =$ -$b\ \hat{\rho}$ x -$b\ \dot{\phi}\ M\ \hat{\phi} = b^2\ \dot{\phi}\ M\ \hat{k}$

$\Rightarrow l_{total} = l = \dot{\phi}\ (a^2\ m + b^2\ M)\ \hat{k}$
$\Rightarrow \dot{l} = \ddot{\phi}\ (a^2\ m + b^2\ M)\ \hat{k}$

Hacemos el DCL para cada masita y así ver las fuerzas que hacen torque:



Las tensiones no hacen torque, pues son paralelos al brazo:

$\Rightarrow \tau_1 = a\ \hat{\rho}$ x $mg\ \hat{x} = a\ \hat{\rho}$ x $mg\ (\cos(\phi)\ \hat{\rho}$ - $\sin(\phi)\ \hat{\phi}) =$ -$amg\ \sin(\phi)\ \hat{k}$
$\Rightarrow \tau_2 =$ -$b\ \hat{\rho}$ x $Mg\ \hat{x} =$ -$b\ \hat{\rho}$ x $Mg\ (\cos(\phi)\ \hat{\rho}$ - $\sin(\phi)\ \hat{\phi}) = bMg\ \sin(\phi)\ \hat{k}$

$\Rightarrow \tau_{total} = \tau = g$ (-am + bM) sin(ϕ) $\hat{k}$

(b)

De lo anterior obtenga la ecuacion dinamica para el ángulo ϕ e intégrela una vez.

igualando la derivada del momento angular total y el torque total:

$\Longleftrightarrow$ (1) $\ddot{\phi}$ = -g $\frac{(am-bM)}{(a^2m+b^2M)}$ sin(ϕ)

Integrando una vez :

$\Longleftrightarrow$ $\frac{\dot{\phi}^2}{2} = g$ $\frac{(am-bM)}{(a^2m+b^2M)}$ cos(ϕ) + C

Imponemos en t=0 : $\phi = \phi_0$ y $\dot{\phi} = 0$;

$\Rightarrow$ $\frac{\dot{\phi}^2}{2} = g$ $\frac{(am-bM)}{(a^2m+b^2M)}$ cos(ϕ) - g $\frac{(am-bM)}{(a^2m+b^2M)}$ cos(ϕ_0)

(c)

Estudie el movimiento a pequeñas oscilaciones en torno al punto $\phi = 0$.

Tomando pequeñas oscilaciones en torno a $\phi = 0$ y aplicado a (1) :

$\Rightarrow$ $\ddot{\phi}$ + g $\frac{(am-bM)}{(a^2m+b^2M)}$ $\phi = 0$

Cuya solución es $\phi(t)$ = Acos(ω t) + Bsin(ω t), con $\omega^2 = g$ $\frac{(am-bM)}{(a^2m+b^2M)}$

Imponemos condiciones iniciales $\phi = \phi_0$ y $\dot{\phi} = 0$

$\Rightarrow$ ϕ_0 = A y 0 = B
$\Rightarrow$ $\phi(t) = \phi_0$ cos($\sqrt{g\frac{(am-bM)}{(a^2m+b^2M)}}$t)

Estudiemos el comportamiento en casos:

1) Si $m = M$:

... **i)** Si $a > b$: se comportará como un movimiento armónico normal, dependera del valor de las constantes la velocidad con la que oscilará el péndulo.
... **ii)** Si $a = b$: se mantendrá en el mismo angulo ; no se moverá.
... **iii)** Si $a < b$: No existe información.

2) Si $a = b$:

... **i)** Si $m > M$: se comportará como un movimiento armónico normal, dependera del valor de las constantes la velocidad con la que oscilará el péndulo.
... **ii)** Si $m = M$: se mantendrá en el mismo angulo ; no se moverá.
... **iii)** Si $m < M$: No existe información.

3) Otros casos: Dependerá del valor de las constantes el comportamiento del péndulo...

Pregunta 2

Según el problema, $\vec{g} = -g\hat{r}$. Pero, según la convención planteada se usará $\vec{g} = -g\hat{k}$

(a) y (b) Se usará un sistema de coordenadas rectangular. Se ha visto, que una partícula sometida a una fuerza externa $\vec{F} = \vec{T}$, con $\vec{T}$ la tensión de la cuerda. En la superficie de la Tierra el péndulo obecede, según Newton, a la siguiente ecuación:

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

Dado que la magnitud de $\vec{\Omega}$, el término $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ se despreciará, por ser muy pequeño en comparación a la magnitud de $\vec{\Omega}$ (por argumento visto en clases). La ecuación anterior, queda por lo tanto:

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v} \tag{1}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= -\Omega_x\hat{\imath} + \Omega_z\hat{k} && (2) \\ \vec{v} &= \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\imath} + \dot{z}\hat{k} && (3) \end{aligned}$$

Donde en (17) se han hecho uso de consideraciones geométricas, como la de descomponer el vector $\vec{\Omega}$ en función de los ejes (x, z). Pero, de forma aproximada, $\Omega_x = \Omega\cos(\lambda)$ y $\Omega_z = \Omega\,\mathrm{sen}(\lambda)$, por lo tanto:

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = (-\Omega\cos(\lambda)\hat{\imath} + \Omega\,\mathrm{sen}(\lambda)\hat{k}) \times (\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k})$$

Vale decir,

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\Omega\dot{y}\,\mathrm{sen}\,\lambda\hat{\imath} + \Omega(\dot{x}\,\mathrm{sen}(\lambda) + \dot{z}\cos(\lambda))\hat{\jmath} - \Omega\dot{y}\cos(\lambda)\hat{k} \tag{4}$$

Del mismo modo, descomponemos la tensión $\vec{T} = T_x + \mathrm{T}_y\hat{\jmath} + T_z\hat{k}$.

De la geometría del problema (si ϕ es el ángulo que describe desde el eje x al eje y, además de la aproximación para pequeñas oscilaciones), tenemos que:

$$\begin{aligned} T_x &= -T\cos(\phi) \approx -T\frac{x}{l} \\ T_y &= -T\,\mathrm{sen}(\phi) \approx -T\frac{y}{l} \\ T_z &= T \approx mg \end{aligned}$$

Quedando, de manera aproximada, lo siguiente:

$$\begin{aligned} T_x &= -T\frac{mgx}{l} && (5) \\ T_y &= -T\frac{mgy}{l} && (6) \\ & && (7) \end{aligned}$$

Usando de (19) a (22) en (16), quedan las siquientes ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T\frac{mgx}{l} + 2m\Omega\dot{y}\,\mathrm{sen}(\lambda) \\ m\ddot{y} &= -T\frac{mgy}{l} - 2m\Omega(\dot{x}\,\mathrm{sen}(\lambda) + \dot{z}\cos(\lambda)) \\ m\ddot{z} &= -T - mg + 2m\Omega\dot{y}\cos(\lambda) \end{aligned}$$

Nos interesa el movimiento del plano (x, y), así que se hará caso omiso al término $\dot{z}$ de las ecuaciones anteriores.

Las dos primeras, escritas de manera simplificada, quedan:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 2\dot{y}\Omega\,\mathrm{sen}(\lambda) \tag{8}$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{l}y = -2\dot{x}\Omega\,\mathrm{sen}(\lambda) \tag{9}$$

En coordenadas polares, tenemos que: $x = r\cos(\phi)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\phi)$. Con este cambio de coordenadas, las dos ecuaciones anteriores quedan:

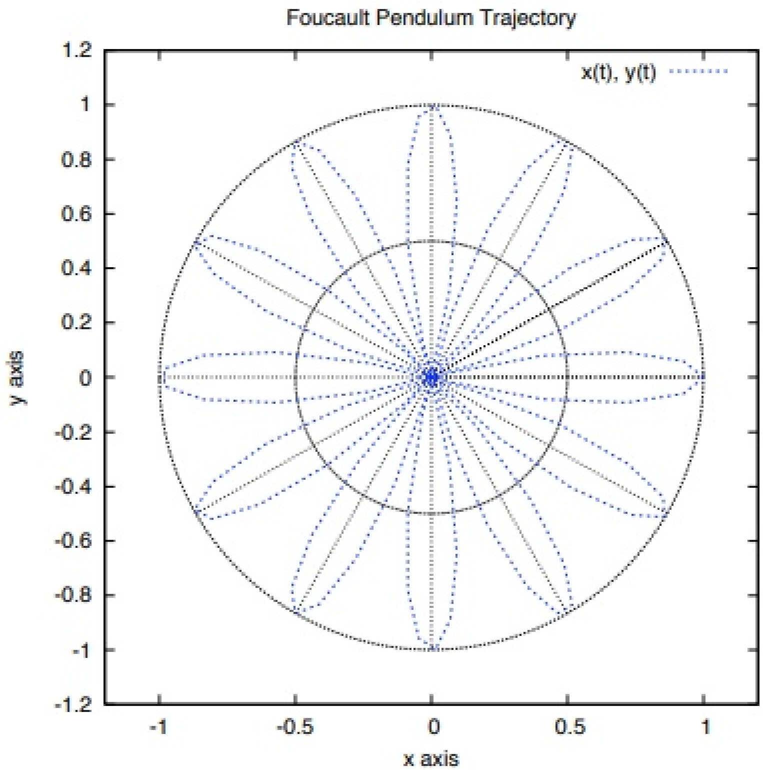
$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}r - 2\Omega\,\mathrm{sen}(\lambda)r\dot{\theta} = 0 \tag{10}$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + 2\Omega\,\mathrm{sen}(\lambda)\dot{r} = 0 \tag{11}$$

Dada la basta literatura revisada para este problema, una solución para la segunda ecuación es:

$$\dot{\theta} = -\Omega\,\mathrm{sen}(\theta) \implies \theta(t) = \theta_0 - 2\Omega\,\mathrm{sen}(\lambda)t \tag{12}$$

Donde se ha efectuado una simple integración. Métodos con números complejos permiten encontrar las ecuaciones para poder dar con el gráfico, el cual se presenta a continuación:


Foucault Pendulum Trajectory
x(t), y(t)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
y axis
-1
-0.5
0
0.5
1
x axis