Pregunta 1

Utilizaremos un sistema de coordenadas esfericas con θ como el cenital y ϕ como el azumital y estara centrada en el vertice del cono. Por enunciado sabemos que la cuerda se recoge con una velocidad constante v_0 al recogerse estaremos poniendo un signo negativo a nuestra velocidad, puesto que va en sentido contrario, teniendo $\dot{r} = -v_0$, ademas se dan las condiciones iniciales de la cuerda r_0 y la velocidad angular w_0 los cuales se refieren a nuestros r y ϕ inciales por nuestro sistema de coordenadas, tambien podemos ver en el eje vertical que nuestro θ es constante, pues siempre vale $\pi - \alpha$ en nuestro cono. Por lo tanto tenemos la siguiente tabla de datos para empezar a resolver el problema

Datos	
$\dot{r}$	$-v_0$
θ	$\pi - \alpha$
$r(0)$	r_0
$\dot{\phi}(0)$	w_0
masa	m

Cuadro 1: Datos

DCL particula:

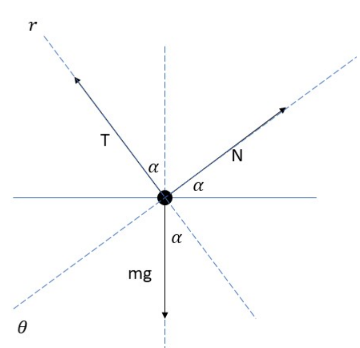


Figura 1: DCL particula

$$\vec{F} = [mg\cos\alpha]\hat{r} + [mg\,\mathrm{sen}\,\alpha]\hat{\theta} + [0]\hat{\phi}$$

Ahora utilizaremos la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ y lo separaremos por sus componentes.

$$[\hat{r}](mg\cos\alpha - T) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)$$

$$[\hat{\theta}](mg\operatorname{sen}\alpha - N) = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)$$

$$[\hat{\phi}]0 = m(2\dot{r}\dot{\phi}/sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)$$

Ahora que tenemos planteadas nuestras ecuaciones, utilizaremos los datos entregados por enunciado, tales como

$$\dot{r} = -v_0 \implies \ddot{r} = 0 \tag{1}$$

Podemos ver que la velocidad es constante, por lo que podemos sacar nuestra posicion de r con una integracion, obteniendo una EDO para cual conocemos la constante por condicion inicial de enunciado.

$$\frac{dr}{dt} = -v_0 \implies dr = -v_0 dt / \int \implies r = -v_0 t + C$$

Evaluamos en $t = 0$, donde por enunciado $r(0) = r_0$

$$r_0 = 0 + C \implies r = -v_0 t + r_0 \tag{2}$$

$$\theta = (\pi - \alpha) \implies \dot{\theta} = 0 \implies \ddot{\theta} = 0 \tag{3}$$

Ademas de esto tambien podemos ver que nuestros senos y cosenos estan en funcion de angulos distintos θ y α, pero los tenemos relacionados por enunciado, entonces dejaremos todo en funcion de α(pues este angulo es conocido)

$$\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha) \tag{4}$$

$$\cos(\theta) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \tag{5}$$

Aplicamos (1), (2), (3),(4) y (5) en nuestras ecuaciones y obtenemos:

$$[\hat{r}](mg\cos\alpha - T) = -m(r_0 - v_0 t)\dot{\phi}^2\sin^2\alpha \tag{6}$$

$$[\hat{\theta}](mg\operatorname{sen}\alpha - N) = m(r_0 - v_0 t)\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha \tag{7}$$

$$[\hat{\phi}]0 = -2v_0\dot{\phi} + (r_0 - v_0 t)\ddot{\phi} \tag{8}$$

Ahora que tenemos nuestras ecuaciones bien definidas y listas para ser trabajadas, iremos por partes:

Sabemos de intro a la fisica que la condicion para despegarse es que la normal sea igual a 0, por lo que se debe imponer $N = 0$ en (7) para asi despejar t, pero tenemos un $\dot{\phi}$ que no conocemos, por lo que debemos encontrarlo primero, para esto tomamos nuestra ecuacion (8)

$$0 = -2v_0\dot{\phi}a + (r_0 - v_0 t)\ddot{\phi}$$

$$2v_0\dot{\phi} = (r_0 - v_0 t)\frac{d\dot{\phi}}{dt}$$

Hacemos nuestro super cambio a lo fisico del dt e integramos nuestra EDO.

$$\frac{2v_0}{(r_0 - v_0 t)}dt = \frac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}} / \int \implies -2\ln(r_0 - v_0 t) + C = \ln\dot{\phi} / \exp() \implies K(r_0 - v_0 t)^{-2} = \dot{\phi}$$

Sabemos por enunciado que $\dot{\phi}(0) = w_0$:

$$\dot{\phi}(0) = K(r_0)^{-2} = w_0 \implies K = \frac{w_0}{(r_0)^{-2}} \implies K = w_0 r_0^2$$

Entonces ahora conocemos el valor de nuestro $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{w_0 r_0^2}{(r_0 - v_0 t)^2} \tag{9}$$

Ahora que conocemos nuestro $\dot{\phi}$, por lo tanto, utilizamos (9) e imponemos $N = 0$ en (7) y despejamos t_d (tiempo despegue).

$$mg \operatorname{sen}\alpha = m(r_0 - v_0 t_d)\left(\frac{w_0 r_0^2}{(r_0 - v_0 t)^2}\right)^2 \sin\alpha\cos\alpha$$

$$g = \frac{w_0^2 r_0^4}{(r_0 - v_0 t_d)^3}\cos\alpha \implies (r_0 - v_0 t_d)^3 = \frac{w_0^2 r_0^4 \cos\alpha}{g} \implies r_0 - v_0 t_d = \sqrt[3]{\frac{w_0^2 r_0^4 \cos\alpha}{g}}$$

$$t_d = \frac{1}{v_0}\left(r_0 - \sqrt[3]{\frac{w_0^2 r_0^4 \cos\alpha}{g}}\right)$$

Ahora debemos buscar la tension en este momento, basta con reemplazar (9) y evaluar en nuestro t_d en (6):

$$T(t_d) = mg\cos\alpha + m(r_0 - v_0 t_d)\left(\frac{w_0 r_0^2}{(r_0 - v_0 t_d)^2}\right)^2 \sin^2\alpha$$

$$T(t_d) = mg\cos\alpha + m\frac{w_0^2 r_0^4}{\left(r_0 - v_0\left(\frac{1}{v_0}\left(r_0 - \sqrt[3]{\frac{w_0^2 r_0^4 \cos\alpha}{g}}\right)\right)\right)^3}\sin^2\alpha$$

$$T(t_d) = mg\cos\alpha + m\frac{w_0^2 r_0^4}{\sqrt[3]{\frac{w_0^2 r_0^4 \cos\alpha}{g}}^3}\sin^2\alpha$$

$$T(t_d) = mg\cos\alpha + m\frac{w_0^2 r_0^4}{\frac{w_0^2 r_0^4 \cos\alpha}{g}}\sin^2\alpha$$

$$T(t_d) = mg\cos\alpha + m\frac{g}{\cos\alpha}\sin^2\alpha$$

$$T(t_d) = mg\left(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

Para la distancia en la que se suelta, basta con evaluar r en t_d:

$$r(t_d) = r_0 - v_0\left(\frac{1}{v_0}\left(r_0 - \sqrt[3]{\frac{w_0^2 r_0^4 \cos\alpha}{g}}\right)\right)$$

$$r(t_d) = \sqrt[3]{\frac{w_0^2 r_0^4 \cos\alpha}{g}}$$

Finalmente para saber la distancia recorrida por la particula, recordamos lo que hicimos en la tarea anterior, aplicamos la formula de longitud de curva, con la integral desde 0 hasta t_d.

$$L(\tau) = \int_0^{t_d} \|\vec{v}\| dt$$

Debemos encontrar nuestro $\vec{v}$.

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

Utilizamos nuestros datos:

$$\vec{v} = [-v_0]\hat{r} + [0]\hat{\theta} + [(r_0 - v_0 t)\frac{w_0 r_0^2}{(r_0 - v_0 t)^2}\sin\alpha]\hat{\phi}$$

Ahora sacamos su norma

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-v_0)^2 + (\frac{w_0 r_0^2}{(r_0 - v_0 t)}\sin\alpha)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_0^2 + \frac{w_0^2 r_0^4}{(r_0 - v_0 t)^2}\sin\alpha^2}$$

Por lo que la distancia recorrida quedara expresada como:

$$L(\tau) = \int_0^{t_d} \sqrt{v_0^2 + \frac{w_0^2 r_0^4}{(r_0 - v_0 t)^2}\sin\alpha^2}$$

En resumen tenemos:

(a) Tiempo en el que se despega:

$$t_d = \frac{1}{v_0}(r_0 - \sqrt[3]{\frac{w_0^2 r_0^4 \cos\alpha}{g}})$$

(b) Valor Normal en tiempo despegue:

$$N(t_d) = 0$$

(c) Valor Tension en tiempo despegue:

$$T(t_d) = mg(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha})$$

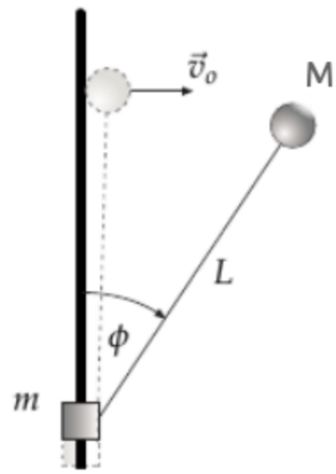
(d) Distancia del vertice al lugar en el que se despega:

$$r(t_d) = \sqrt[3]{\frac{w_0^2 r_0^4 \cos\alpha}{g}}$$

(e) Distancia recorrida hasta el tiempo en que se despega:

$$L(\tau) = \int_0^{t_d} \sqrt{v_0^2 + \frac{w_0^2 r_0^4}{(r_0 - v_0 t)^2}\sin\alpha^2}$$

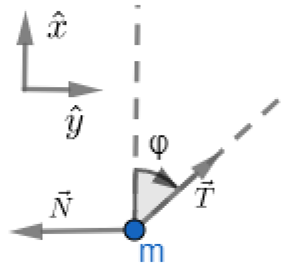
P2. Sobre una superficie horizontal, considere un anillo de masa m que se desliza sin roce por una barra. El anillo está unido con una partícula de masa M a través de una cuerda de largo L, como se muestra en la figura. Inicialmente, con la cuerda completamente extendida y la partícula colocada junto a la barra, se le imprime una velocidad v_0 en dirección perpendicular a la barra a la partícula con masa M.



(a) Plantear las ecuaciones del movimiento del anillo y la partícula.

Para abarcar esta pregunta se usarán dos tipos de coordenadas: para la masa M serán coordenadas cilíndricas (pues se mueve circunferencialmente) y para el anillo m se usarán cartesianas (pues su movimiento es unidimensional). Ambas con su origen sobre la posición inicial del anillo (antes de empezar el movimiento).
Otro punto importante es definir las características del sistema. Los objetos serán: la barra, la masa m y el anillo M y la cuerda ideal que las une. Se considerarán estas masas como partículas puntuales en un ambiente sin roce ni gravedad. Además, la velocidad v_0 ocurrirá en t=0 (parte con momentum).
Ahora se procederá a configurar las ecuaciones de movimiento para cada partícula:

En m:
Se dispondrá el eje $\hat{x}$ en vertical y el eje $\hat{y}$ en horizontal para que el ángulo ϕ recorra desde x hasta y. Se puede apreciar que el movimiento ocurre solo en el eje $\hat{x}$ con una distancia $x(t)$ del origen. En el eje $\hat{y}$ la barra aplica una fuerza normal $\vec{N}$ cuando a este anillo se le aplica una tensión $\vec{T}$ en cierto ángulo ϕ, anulando el movimiento en este eje.
Asumiendo la inexistencia de fuerzas externas se tendrán las ecuaciones de movimiento para m:



Eje x:

$$m\ddot{x} = T\cos\phi \tag{10}$$

Eje y:

$$0 = T\,\mathrm{sen}\,\phi - N \tag{11}$$

Para la partícula M se tiene que su posición respecto al origen es:

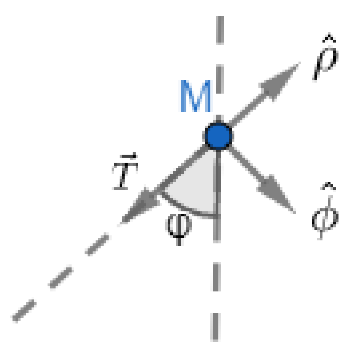
$$\vec{r} = x\hat{x} + L\hat{\rho}$$

con L el largo de la cuerda siempre tensa.
Por tanto, derivando respecto al tiempo, la aceleración será:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{x} - L\dot{\phi}^2\hat{\rho} + L\ddot{\phi}\hat{\phi}$$

Pero, para facilitar el manejo, se puede expresar al vector unitario $\hat{x}$ en función de $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ usando trigonometría sobre los dos sistemas de coordenadas (superpuestos), generando la siguiente relación: $\hat{x} = \hat{\rho}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi$
Entonces la aceleración de M es:

$$\ddot{r} = \ddot{x}(\hat{\rho}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi) - L\dot{\phi}^2\hat{\rho} + L\ddot{\phi}\hat{\phi}$$



Por último, la única fuerza actuante sobre M es la tensión $\vec{T}$. La que apunta contraria a $\hat{\rho}$. Así se pueden crear las ecuaciones de movimiento en $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$:
En $\hat{\rho}$:

$$M(\ddot{x}\cos\phi - L\dot{\phi}^2) = -T \tag{12}$$

En $\hat{\phi}$:

$$M(L\ddot{\phi} - \ddot{x}\sin\phi) = 0 \tag{13}$$

(b) Determine el desplazamiento del anillo según la barra en función del ángulo ϕ que forma la cuerda con la barra. ¿Cuál es el desplazamiento máximo que puede tener? Discuta su resultado para $m < M$,$m = M$ y $m > M$.

Puesto que no hay fuerzas aplicándose sobre el sistema, el momentum lineal se conserva. En específico sobre cada eje (en este caso se trabajará con coordenadas cartesianas). Es decir, el momentum inicial es igual al final:

$$m\vec{v}_m + M\vec{v}_M = M\vec{v_0}$$

Recordando los valores y direcciones de las velocidades:

$$m\dot{x}\hat{x} + M(\dot{x}\hat{x} + L\dot{\hat{\rho}}) = Mv_0\hat{y}$$

Como el movimiento de la partícula y el anillo no varía en $\hat{k}$ ni en $\hat{\rho}$ (pues L es constante):
$m\dot{x}\hat{x} + M(\dot{x}\hat{x} + L\dot{\phi}\hat{\phi}) = Mv_0\hat{y}$
Ahora bien, utilizando trigonometría sobre los vectores unitarios, se puede notar que:
$\hat{\phi} = \hat{y}\cos\phi - \hat{x}\sin\phi$
Reemplazando sobre lo anterior:

$$m\dot{x}\hat{x} + M(\dot{x}\hat{x} + L\dot{\phi}(\hat{y}\cos\phi - \hat{x}\sin\phi) = Mv_0\hat{y}$$

Esta última ecuación permitirá saber la posición de m respecto al ángulo ϕ, al ultilizar la componente en $\hat{x}$:

$$m\dot{x} + M\dot{x} - ML\dot{\phi}\sin\phi = 0$$

Despejando $\dot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{ML\sin\phi}{m + M}\dot{\phi}$$

Finalmente, integrando respecto al tiempo se puede llegar a la modelación de la distancia $x(t) = x(\phi(t))$:

$$x(t) = \frac{L}{\frac{m}{M} + 1}\int_o^t \sin\phi\frac{d\phi}{dt}dt = \frac{L}{\frac{m}{M} + 1}(1 - \cos\phi) = x(\phi)$$

Una vez encontrada esta relación, se debe buscar la distancia máxima según el ángulo ϕ. Es fácil ver que si $\phi = \pi k$ con $k \in \mathbb{N}$ impares, entonces la distancia máxima al origen es:

$$r(\phi) = 2\frac{L}{\frac{m}{M} + 1}$$

Se puede observar la concordancia de este resultado con una situación real al evaluar, por ejemplo, el valor de las masas:
Si $m > M$ la ecuación plantea que m no tenderá a moverse mucho (el denominador se vuelve mayor a 2, empequeñeciendo el valor final de la distancia).
Por el contrario, si $m < M$, la razón entre las masas es menor a 1, agrandando el resultado final de la distancia.
Finalmente, si las masas son iguales, el resultado se vuelve simplemente L.

(c) Estudie la rapidez angular $\dot{\phi}$ que adquiere la partícula en functión de ϕ. Grafique la función y comente su resultado para $m < M$,$m = M$ y $m > M$.

Primeramente se deben revisar las ecuaciones de movimiento de la parte (a). Mediante estas se despejará $\vec{\omega}(t)$ (velocidad angular).
En la ecuación 10 se puede despejar T:

$$T = \frac{m\ddot{x}}{\cos\phi}$$

Ahora, sumándolo a 12 resulta la siguiente ecuación:

$$M(\ddot{x}\cos\phi - L\dot{\phi}^2) + m\frac{\ddot{x}}{\cos\phi} = 0$$

Factorizando $\ddot{x}$:
$(M\cos\phi + \frac{m}{\cos\phi})\ddot{x} = ML\dot{\phi}^2$

Luego, se debe ver que en 13 se puede despejar $\ddot{x}$:
$\ddot{x} = \frac{L\ddot{\phi}}{\sin\phi}$

Entonces la ecuación queda:

$$(M\cos\phi + \tfrac{m}{\cos\phi})\tfrac{L\ddot{\phi}}{\sin\phi} = ML\dot{\phi}^2$$

Se puede observar que esta ecuación es una EDO de segundo orden a coeficientes variables. Luego se procede a resolverla por cambio de variable:
$\dot{\phi} = \omega$
$\ddot{\phi} = \omega\frac{d\omega}{d\phi}$
Una vez resuelta, la función $\omega(\phi)$ es:

$$\omega(\phi) = \tfrac{v_0}{L}\sqrt{\tfrac{m+M}{m+M\cos^2\phi}}.$$

Nuevamente se debe analizar el resultado obtenido y verificar el cumplimiento lógico físico. Esta vez la $\vec{\omega}$ máxima ocurre con $\phi = \pi/2$, resultando:

$$\omega(\phi) = \tfrac{v_0}{L}\sqrt{1 + \tfrac{M}{m}}.$$

Si $m < M$, la razón entre las masas será mayor a 1, por lo cual es en este caso cuando la partícula alcanzará la mayor velocidad angular posible.

Si $m > M$,la razón se vuelve menor a 1, por lo cual la velocidad alcanzada será la mínima de todos los casos.

Si $m = M$, la velocidad máxima obtiene un valor calculable: $\frac{v_0}{L}\sqrt{2}$.

Obs: los gráficos en cada caso tomaron las siguientes variables:
$v_0 = 5m/s$.
$L = 2m$.
Para $m > M$ y $m < M$ las masas fueron 10 y 20 kilogramos. El caso m=M fue con 10 kilogramos. Un asunto interesante es ver que esta función no depende de las masas, sino de su razón.

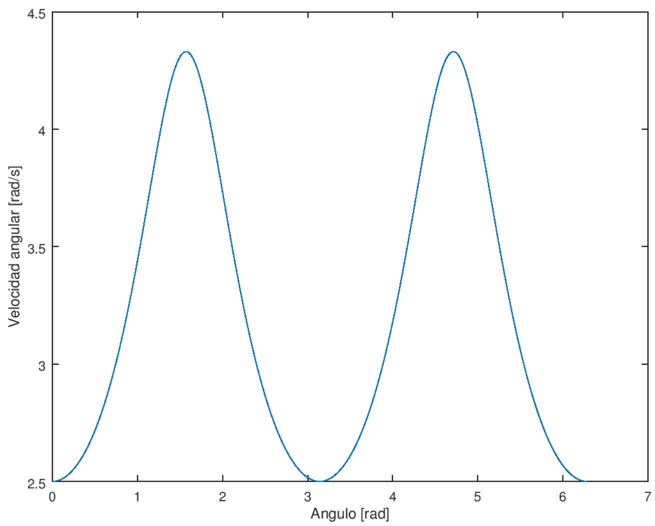


Figura 1: Gráfico de velocidad angular en función del ángulo para $m < M$

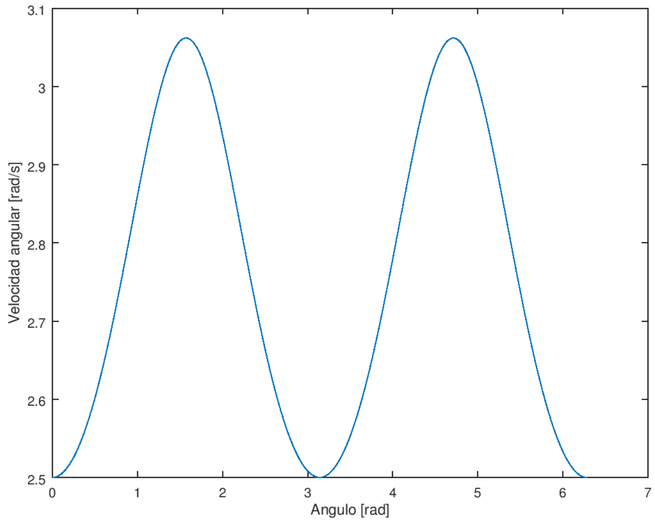


Figura 2: Gráfico de velocidad angular en función del ángulo para $m > M$

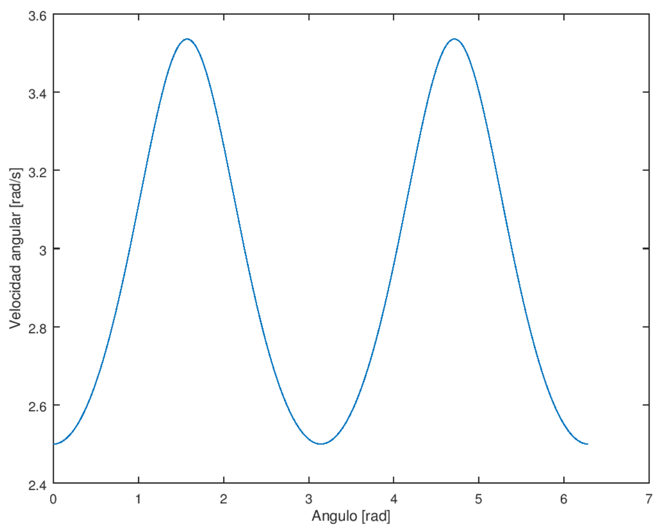


Figura 3: Gráfico de velocidad angular en función del ángulo para $m = M$

(d) ¿Puede llegar la partícula a su punto de partida? Si es posible, estime el tiempo (analítica o numéricamente) que le tomaría hacerlo. Haga suposiciones para la razón entre las masas m y M. Indicación: Puede tomar $L/v_0 = 10s$

Claramente se puede ver que la velocidad angular es cíclica y que la partícula no se detendrá mientras no hayan fuerzas externas. En este caso basta con evaluar el ángulo ϕ mínimo con tal de que la posición inicial ocurra otra vez.
Recordando la posición de M:
$\vec{r}(\phi) = x(\phi)(\hat{\rho}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi) + L\hat{\rho}$
Ahora, evaluando la condición inicial:

$\vec{r}(\phi) = x(\phi)(\hat{\rho}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi) + L\hat{\rho} = L\hat{\rho} + 0\hat{\phi}$
Además, $x(\phi)$ es conocido, así que se procede a reemplazar y ordenar por coordenada (para encontrar el ángulo):

En $\hat{\rho}$: $L = L + \frac{L}{\frac{m}{M}+1}(1-\cos\phi)\cos\phi$ implica que $\phi = \pi/2$ o $\phi = 2\pi$ como mínimo.

En $\hat{\phi}$: $0 = x(\phi)\sin\phi$ implica que $\phi = \pi$ o $\phi = 2\pi$ como mínimo.

Por lo tanto, el ángulo mínimo en el que se cumplen ambas condiciones y entonces vuelve a la posición inicial es en $\phi = 2\pi$.

De este modo se puede proceder a encontrar una fórmula para el tiempo en que vuelve a la posición inicial. Para este objetivo se usará la velocidad angular (calculada en (c)):
$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{v_0}{L}\sqrt{\frac{m+M}{m+M\cos^2\phi}}$
Haciendo separación de variables e integrando:

$$t = \frac{L}{v_0}\int_0^{\phi(t)}\sqrt{\frac{m+M\cos^2\phi}{m+M}}d\phi$$

Siendo esta la fórmula para el tiempo en función del ángulo, se puede observar que, para volver a la posición inicial, basta integrar ϕ entre $[0, 2\pi]$.
Para esto último se recurrirá al método numérico llamado ”$EulerProgresivo$”, con condición inicial $t(\phi = 0) = 0$.
Datos:
$m/M = 1$.
$L/v_0 = 10s$.
intervalo=h= 0.01

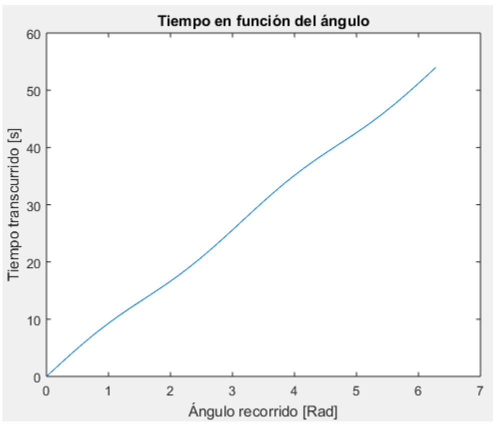


Figura 4: Gráfico del tiempo en función del ángulo mediante Euler progresivo.

En el gráfico anterior se puede apreciar el tiempo y como varía a medida que avanza el ángulo (notar que el tiempo si puede depender del ángulo cuando este depende a su vez del tiempo). Se puede ver que en las zonas con pendiente más cercana a cero (zonas más planas) se recorrió un mayor ángulo en menos tiempo, indicando una máxima velocidad angular cerca de $\phi = \pi/2$ y $\phi = 3\pi/2$.
El tiempo en llegar nuevamente a la posición según matlab es:
$t_f = 53{,}9939$, pero este resultado no es completamente exacto debido al método usado. Por lo tanto el tiempo de llegada es aproximadamente 54 segundos.

(e) ¿Cuál es la fuerza máxima que soporta la barra durante el movimiento? ¿Para qué valor de ϕ ocurre?

Para calcular la fuerza máxima que soporta la barra se debe volver a las ecuaciones 10 y 11:
$0 = T \operatorname{sen}\phi - N$. La cual indica la fuerza normal (fuerza que ejerce la barra) en dependencia de la tensión y ϕ
Pero se necesita conocer primero la tensión, sacada de: $m\ddot{x} = T\cos\phi$. La que se puede resolver fácilmente con el valor de $\ddot{x}$, encontrado en 13:
$\ddot{x} = L\frac{\ddot{\phi}}{\sin\phi}$
Conociendo el valor $\vec{\omega}(t)$ en la parte (c) y derivándolo:

$$\ddot{\phi} = \frac{v_0^2(m+M)M\cos\phi \operatorname{sen}\phi}{L^2(m+M\cos^2\phi)^2}$$

$$\ddot{x} = L\frac{\ddot{\phi}}{\sin\phi} = \frac{v_0^2(m+M)M\cos\phi}{L(m+M\cos^2\phi)^2}$$

Ahora falta solo reemplazar en la ecuación 10:

$$T = \frac{m\ddot{x}}{\cos\phi} = \frac{mMv_o^2(m+M)}{L(m+M\cos^2\phi)^2}$$

Como los denominadores son siempre positivos, el máximo de tensión se obtiene al buscar el ϕ con que estos se vuelvan mínimos. Es decir, en $\phi = \pi k/2$ con $k \in \mathbb{N}$ impares.
Se observa también en $N = T\operatorname{sen}\phi$ que este ángulo Maximiza la Normal. Entonces se puede asegurar que para $\phi = \pi/2$ (por ejemplo) esta fuerza será máxima. Esto tiene mucho sentido, pues la normal apunta siempre horizontal, por lo que el ángulo debiese ser recto.