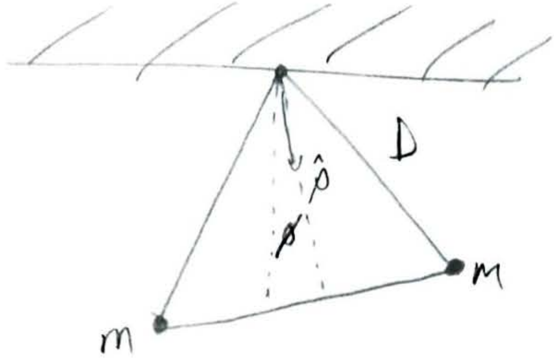
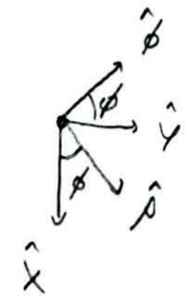
PAUTA AUX 6

P1



Definimos el ángulo ϕ medido entre la vertical y la recta altura del triángulo

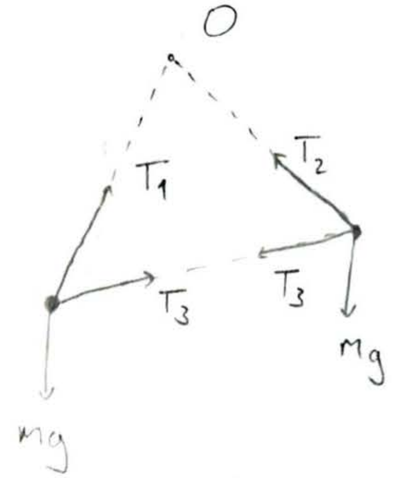


La posición de las masas
$$\vec{r}_1 = D\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\rho} - D\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\phi}$$
$$\vec{r}_2 = D\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\rho} + D\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\phi}$$

La velocidad
$$\dot{\vec{r}}_1 = D\dot{\phi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\phi} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\rho}\right]$$
$$\dot{\vec{r}}_2 = D\dot{\phi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\phi} - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\rho}\right]$$

Momentum angular del sistema
$$\vec{l} = m\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2$$
$$= 2mD^2\dot{\phi}\,\hat{z}$$

DCL



$\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ no ejercen torque porque son paralelas a $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$

El torque ejercido por $\vec{T}_3$ se va a cancelar

Solo el peso ejerce torque

$$m\vec{g} = mg\hat{x} = mg(\cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi})$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times m\vec{g} + \vec{r}_2 \times m\vec{g} = -2mgD\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\phi\;\hat{z}$$

La ecuación de movimiento queda $\vec{I} = \vec{\tau}$

$$2mD^2\ddot{\phi} = -2mgD\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\phi$$

Aproximación $\phi \ll 1$

$\sin\phi \approx \phi$

$$\ddot{\phi} + \underbrace{\frac{g\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{D}}_{\Omega^2}\phi = 0$$

$$\phi(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$$

$\phi(0) = \phi_0 \qquad \dot{\phi}(0) = 0$

$A = \phi_0 \qquad B = 0$

$$\phi(t) = \phi_0\cos(\Omega t)$$

b) Para obtener la fuerza que ejerce el techo debemos saber $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$

Ecuación de movimiento de cada partícula

$$m\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{T}_1 + \vec{T}_3 + m\vec{g} \qquad (1)$$

- $mD\dot{\phi}^2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\rho} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\phi}\right] + mD\ddot{\phi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\phi} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\rho}\right]$

$$= T_1\left[-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\rho} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\phi}\right] + T_3\hat{\phi} + mg\left[\cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi}\right]$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{T}_2 - \vec{T}_3 + mg \qquad (2)$$

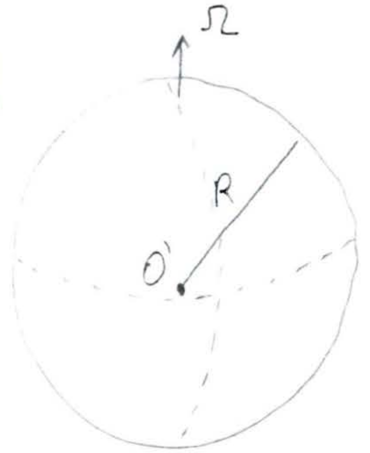
- $mD\dot{\phi}^2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\rho} - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\phi}\right] + mD\ddot{\phi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\phi} - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\rho}\right]$

$$= T_2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{\phi}\right] - T_3\hat{\phi} + mg\left[\cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi}\right]$$

De $(1)\cdot\hat{\rho}$ podemos despejar T_1, y de $(2)\cdot\hat{\rho}$ podemos despejar $\vec{T}_2$

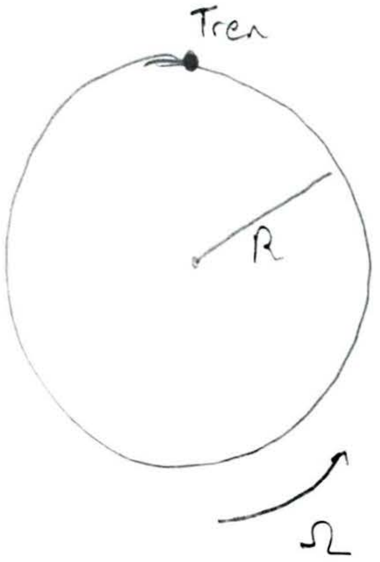
La fuerza que ejerce el techo es $\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$

P2)



El tren se mueve por el ecuador, en una circunferencia de radio R. Fijamos un sistema de referencia no inercial en el centro de la Tierra, O', que gira con velocidad angular Ω.

Visto desde arriba



La posición del tren (con respecto a O') es

$$\vec{r}\,' = R\hat{\rho}\,'$$

$$\vec{v}\,' = R\dot{\phi}\,\hat{\phi}\,'$$

$$\vec{a}\,' = -R\dot{\phi}^2\hat{\rho}\,'$$

La velocidad angular del sistema es

$$\vec{\Omega} = \Omega\,\hat{z}\,' \qquad \dot{\vec{\Omega}} = 0$$

Utilizamos la ecuación de movimiento en sistemas no inerciales

$$m\vec{a}\,' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - 2m(\vec{\Omega}\times\vec{v}\,') - m\,\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,') - m\,\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}\,'$$

El problema nos pide la Fuerza, así que la dejamos como incógnita, y reemplazamos $\vec{r}\,'$, $\vec{v}\,'$, $\vec{a}\,'$ y $\vec{\Omega}$

$$-mR\dot{\phi}^2\hat{\rho}\,' = \vec{F} - 2mR\Omega\dot{\phi}\,(\hat{z}\,'\times\hat{\phi}\,') - mR\Omega^2\left(\hat{z}\,'\times(\hat{z}\,'\times\hat{\rho}\,')\right)$$

$$\vec{F} = -mR(\dot{\phi}^2 + \Omega^2 + 2\dot{\phi}\Omega)$$

* Un caso interesante es $\dot{\phi} = -\Omega$, donde $\vec{F} = 0$, porque en el fondo el tren está completamente quieto respecto a un sistema Inercial.