Problema 1

Considere una pelota rebotando contra el suelo. Si llega al suelo con una rapidez v, despega con una rapidez $v' = \alpha v$, con $0 < \alpha < 1$. Suponga que en el tiempo $t = 0$ la pelota despega con una velocidad v_0, luego en el instante t_1 ocurre el primer bote, tras el cual la pelota despega con velocidad v_1, y así para el n-ésimo bote.

(a) Calcule el instante t_n en el que ocurre el n-ésimo bote.
(b) Determine el instante T en el que la pelota deja de rebotar. ¿Cuántos botes da en total?
(c) Grafique el número del bote n en función del tiempo. Interprete el gráfico.

Solución al problema:

Previo a responder las preguntas del problema resulta conveniente recordar las ecuaciones del lanzamiento vertical hacia arriba, estas son:

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{g}t \tag{1}$$

$$\Delta h(t) = v_0 - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

$$v^2(t) = v_0^2 - 2g\Delta h \tag{3}$$

Con $\vec{v_0}$ y $\vec{v}(t)$ las velocidades inicial e instantánea en t respectivamente; v_0 y $v(t)$ la rapidez inicial e instantánea en t; $\Delta h(t)$ la altura en t; $\vec{g}$ la aceleración de gravedad y g su módulo. Todas las ecuaciones estan planteadas con un origen de referencia en el punto del suelo donde la pelota despega y rebota. Con estas ecuaciones es posible llegar a valores notables como:

$$t_{vuelo} = 2\frac{v_0}{g} \tag{4}$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \tag{5}$$

Con t_{vuelo} el tiempo de vuelo entre dos botes seguidos y h_{max} la altura máxima dada una velocidad inicial. Estas ecuaciones resultarán útiles al momento de evaluar los tramos entre botes.

Solución parte (a):

Se tiene que en $t = 0$ la pelota comienza a subir con rapidez v_0 para luego caer . En t_1 la pelota comienza a subir por segunda vez con rapidez v_1. Siguiendo este razonamiento, como la rapidez con la que sube la pelota está definida por $v' = \alpha v$, es posible ver que en el instante t_n la pelota comenzará a subir con rapidez:

$$v_n = \alpha v_{n-1} = \alpha^n v_0 \tag{6}$$

Al reemplazar (6) en (4) se puede conocer el tiempo que demora la pelota en el aire en un tramo de dos botes seguidos, notar que el exponente de α se disminuye en uno debido a que en el primer tramo de tiempo la rapidez es v_0 y, en consecuencia, α comienza a participar en el segundo tramo de tiempo:

$$\Delta t_n = (t_n - t_{n-1}) = 2\frac{\alpha^{n-1} v_0}{g} \tag{7}$$

De esta forma, basta con sumar todos los Δt_n para conocer el tiempo final:

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = 2\frac{v_0}{g}\sum_{i=1}^{n} \alpha^{i-1} \tag{8}$$

Para poder aprovechar la propiedad de la sumatoria de una potencia se hace el cambio de variable $k = i - 1$ para que la suma parta de cero:

$$= 2\frac{v_0}{g}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{k} \tag{9}$$

Utilizando la propiedad de la sumatoria de una potencia, queda que:

$$t_n = 2\frac{v_0(\alpha^n - 1)}{g(\alpha - 1)} \tag{10}$$

Siendo esta la solución de la parte **(a)**

Solución parte (b):

Resulta directo notar que al ser α una constante positiva menor que 1, entonces $\alpha^n < \alpha$ tal que $n > 1$. Con esto es claro que a mayor n la rapidez de rebote disminuye y con ella la altura máxima, en consecuencia, la pelota tiende a dejar de botar.

De esta forma se puede decir que $n \to \infty \Longrightarrow t_n \to T$. Con T el tiempo en que la pelota deja de botar, por lo tanto, basta con tomar el límite de la ecuación (10) cuando $n \to \infty$.
Sigue que:

$$T = \lim_{n\to\infty} 2\frac{v_0(\alpha^n - 1)}{g(\alpha - 1)} = 2\frac{v_0(-1)}{g(\alpha - 1)} \tag{11}$$

Al ordenar queda que:

$$T = 2\frac{v_0}{g(1 - \alpha)} \tag{12}$$

Que reprsenta el instante en la pelota deja de rebotar.

Para la cantidad de botes que da hay que calcular la función inversa del tiempo. Para obtener tal función, basta con despejar n de la ecuacion 10. Luego:

$$n(t) = \frac{ln(\frac{g(\alpha-1)}{2v_0}t+1)}{ln(\alpha)} \tag{13}$$

Sin embargo, como el numero de botes es un numero entero, procedemos a arreglar la función aplicando la parte entera. Representamos entones el numero de botes como:

$$n'(t) = [n(t)] \tag{14}$$

La cual viene siendo una forma de hallar el numero de botes en función del tiempo. No obstante, como la funcion falla cuando $t_n = T$, podemos definir el dejar de botar cuando la altura maxima del bote tiende a cero, y con ello estimar el valor de n, ulilizando la ecuacion (5) y reemplazando la rapidez inicial por la rapidez n-ésima de la siguiente forma:

$$h_n = \frac{v_n^2}{2g}$$

$$h_n = \frac{(v_0\alpha^n)^2}{2g}$$

$$h_n = \alpha^{2n}\frac{v_0^2}{2g}$$

$$h_n = \alpha^{2n}h_0 \tag{15}$$

Despejando n de la ecuación llegamos a:

$$n = \frac{ln(\frac{h_n}{h_0})}{2\,ln(\alpha)} \tag{16}$$

Con esto, podemos considerar un $\varepsilon = \frac{h_n}{h_0}$ controlando h_n de tal forma que nos acerquemos a cero mediante una fracción de la altura inicial, por ejemplo, considerar prudente que h_n sea una millonésima parte de h_0 ($\varepsilon = 10^{-6}$), etc. Sin olvidar que $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, considerar la parte entera.

Solución parte (c):
Para graficar el número de botes en función del tiempo se utilizaron las ecuaciones (13) y (14) deducidas en la parte (b) y se le asignaron valores a los parámetros que se encuentran en la función, los cuales son:

$$v_0 = 20[m/s] \quad ; \quad g = 10[m/s^2]$$

para α se usaron 3 valores distintos para poder visualizar mejor como este parámetro afecta al movimiento de la pelota. En primera instancia analizaremos la función continua del numero de botes y luego la parte entera:

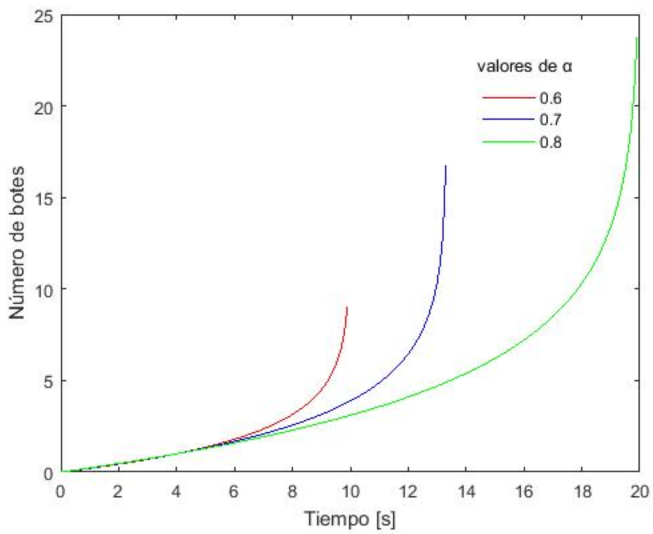


Figura 1: Gráfico de número de botes en función del tiempo (funcion continua)

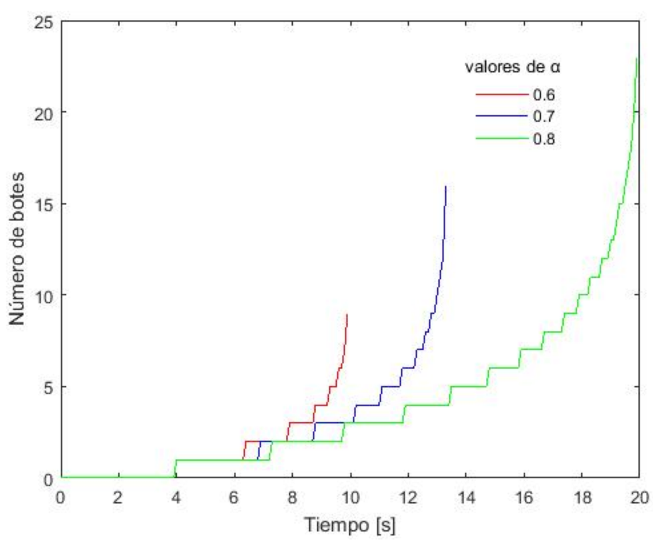


Figura 2: Gráfico de número de botes (n) en función del tiempo (con $n \in \mathbb{N}$)

Nótese que la función es asintótica al tiempo límite, al cual le corresponde la ecuación (12) y representa el tiempo transcurrido hasta que la pelota deja de dar botes. De esta forma, el número de botes es un valor aproximado, ya que, teóricamente, el tiempo T se encuentra definido cuando el número de botes tiende a infinito (ver figura 1). notar también que T, al depender de α, aumenta acorde α tiende a 1 el cual depende del valor de α, mientras mayor sea su valor, mayor es la cantidad de botes que alcanza a dar la pelota. El aumento de los botes acorde el tiempo tiende al tiempo límite se nota con mayor fuerza en el gráfico de la parte entera (figura 2), en el que cada “peldaño” corresponde a un bote.

1. Pregunta 2

Definimos nuestro eje de coordenadas cartesianas, donde el origen es el punto O donde parte el bote, el eje $\hat{i}$ corresponde a la orilla del río -positivo hacia la derecha- y el eje $\hat{j}$ positivo hacia A. El vector que va desde el bote al punto A, se pueden relacionar con $\vec{v_1}$ de la siguiente manera:

$$\vec{r_a} - \vec{r_b} = \alpha(t)\vec{v_1}$$

Derivando con respecto al tiempo -recordando que $\vec{r_a}$ es cte-

$$-\vec{v_b} = \dot{\alpha}\vec{v_1} + \alpha\dot{\vec{v_1}}$$

Escribimos $\vec{v_b}$ en función de la velocidad del río y $\vec{v_1}$. Luego aplicamos producto punto con $\vec{v_1}$ y, como la magnitud de este vector es constante, $\vec{v_1}\dot{\vec{v_1}} = 0$

$$-(\vec{v_0} + \vec{v_1})\vec{v_1} = \vec{v_1}^2\dot{\alpha}$$

$$-\vec{v_0}\vec{v_1} - \vec{v_1}^2 = v_1^2\dot{\alpha}$$

Integramos desde 0 hasta t_f

$$-\int_0^{t_f} \vec{v_0}\vec{v_1}(t)dt - \int_0^{t_f} v_1^2 dt = \int_0^{t_f} v_1^2\dot{\alpha}(t)dt$$

Aplicamos TFC

$$-\int_0^{t_f} \vec{v_0}\vec{v_1}(t)dt - v_1^2(t_f - 0) = v_1^2(\alpha(t_f) - \alpha(0)) \tag{1}$$

De la expresión inicial, despejamos:

$$\alpha(t_f)\vec{v_1}(t_f) = \vec{r_a} - \vec{r_b}$$

Para t_f, el bote está en A y $\vec{v_1}$ es no nulo

$$\Rightarrow \alpha(t_f) = 0 \tag{2}$$

Por otro lado,

$$\alpha(0)\vec{v_1}(0) = \vec{r_a}(0) - \vec{r_b}(0) = D\hat{j}$$

La distancia inicial es D por enunciado y $\vec{v_1}$ apunta hacia A, osea, hacia $\hat{j}$

$$\Rightarrow \alpha(0) = \frac{D}{v_1} \tag{3}$$

Por último, desde la relación de las velocidades:

$$\vec{v_b} = \vec{v_0} + \vec{v_1}$$

Hacemos producto punto con $\vec{v_0}$

$$\vec{v_b}\vec{v_0} = \vec{v_0}^2 + \vec{v_1}\vec{v_0}$$

Integramos con respecto al tiempo

$$\vec{v_0}\int_0^{t_f} \vec{v_b}(t)dt = \int_0^{t_f} \vec{v_0}^2 dt + \int_0^{t_f} \vec{v_1}(t)\vec{v_0}dt$$

Aplicamos TFC y ordenamos

$$\int_0^{t_f} \vec{v_1}(t)\vec{v_0}dt = \vec{v_0}(\vec{r_b}(t_f) - \vec{r_b}(0)) - \vec{v_0}^2(t_f - 0)$$

Reemplazamos la posición inicial y final del bote:

$$\int_0^{t_f} \vec{v_1}(t)\vec{v_0}dt = \vec{v_o}(D\hat{j} - 0) - \vec{v_o}^2 t_f$$

Como $\vec{v_0} = v_0\hat{i}$, es perpendicular a $D\hat{j}$ y por lo tanto su producto punto es nulo. Sigue que:

$$\int_0^{t_f} \vec{v_1}(t)\vec{v_0}dt = -\vec{v_o}t_f \tag{4}$$

Finalmente, usamos (2), (3), (4) en (1):

$$\Rightarrow v_0^2 t_f - v_1^2 t_f = v_1^2(-\frac{D}{v_1})$$

$$\Rightarrow t_f(v_1^2 - v_0^2) = Dv_1$$

$$\Rightarrow t_f = \frac{Dv_1}{v_1^2 - v_0^2}$$

Pregunta 3

(a)

Considerando la ecuación dada para la aceleración de la partícula, procedemos a desarrollar:

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) &= -\Omega^2 \vec{r}(t) && (\cdot \times \vec{r}(t)) \\
\vec{a}(t) \times \vec{r}(t) &= 0 && (-) \\
\vec{r}(t) \times \vec{a}(t) &= 0 && (+\vec{v}(t) \times \vec{v}(t)) \\
\vec{v}(t) \times \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \times \vec{a}(t) &= \vec{v}(t) \times \vec{v}(t) \\
\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \times \dot{\vec{v}}(t) &= 0 \\
\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)) &= 0
\end{aligned}$$

Y con esto hemos llegado a información fundamental sobre la partícula. Como sabemos, si la derivada de cierto vector es 0 significa que dicho vector es constante -en este caso, $\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$-.

¿Pero qué es $\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$? Si consideramos $t = 0$, entonces $\vec{r}(t) = \vec{r_0}$ y $\vec{v}(t) = \vec{v_0}$, y así $\vec{r_0} \times \vec{v_0}$ es el vector normal al plano que generan estos dos al comienzo, al que en módulo 1 llamaremos $\hat{n} = \frac{\vec{r_0} \times \vec{v_0}}{\|\vec{r_0} \times \vec{v_0}\|}$. Al ser este vector constante para todo t, y la velocidad tangencial a la posición para todo instante de tiempo, significa que el vector posición $\vec{r}(t)$ se mantiene siempre contenido en los límites del plano definido al comienzo del sistema.

(b)

Sabemos por enunciado que $\ddot{\vec{r}}(t) + \Omega^2 \vec{r}(t) = 0$. Esta ecuación es, de hecho, una ecuación diferencial conocida donde una solución se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{r}(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t) &= \frac{d}{dt}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) \\
\vec{v}(t) &= -A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t) && (2)
\end{aligned}$$

Donde A y B son constantes por ahora desconocidas. Para encontrarlas, utilizamos las condiciones iniciales del problema ($t = 0$):

$$\begin{aligned}
\vec{r}(0) &= A\cos(0) + B\sin(0) && (1) \\
A &= \vec{r_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}(0) &= -A\Omega\sin(0) + B\Omega\cos(0) && (2) \\
\vec{v_0} &= B\Omega \\
B &= \frac{\vec{v_0}}{\Omega}
\end{aligned}$$

Así, reemplazando A y B en (1), obtenemos la ecuación de la posición:

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0}\cos(\Omega t) + \frac{\vec{v_0}}{\Omega}\sin(\Omega t)$$

Donde, comparando con la ecuación propuesta en el enunciado, obtenemos que $f(t) = \cos(\Omega t)$ y $g(t) = \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega}$.

(c)

Para facilitar la visualización de la posición de la partícula, separaremos su ecuación itinerario en dos componentes - una en la dirección de $\vec{r_0}$ y la otra en dirección perpendicular a éste. A los vectores unitarios correspondientes los nombraremos $\hat{j}$ e $\hat{i}$ respectivamente.

Así, considerando α como el ángulo entre $\vec{r_0}$ y $\vec{v_0}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{r_0} &= \|\vec{r_0}\|\hat{j}\\ \vec{v_0} &= \|\vec{v_0}\|\cos(\alpha)\hat{i} + \|\vec{v_0}\|\sin(\alpha)\hat{j}\end{aligned}$$

Luego, separando en las componentes respectivas:

$$\begin{aligned}\vec{r_i}(t) &= (\frac{1}{\Omega}\|\vec{v_0}\|\cos(\alpha)\sin(\Omega t))\hat{i}\\ \vec{r_j}(t) &= (\|\vec{r_0}\|\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega}\|\vec{v_0}\|\sin(\alpha)\sin(\Omega t))\hat{j}\end{aligned}$$

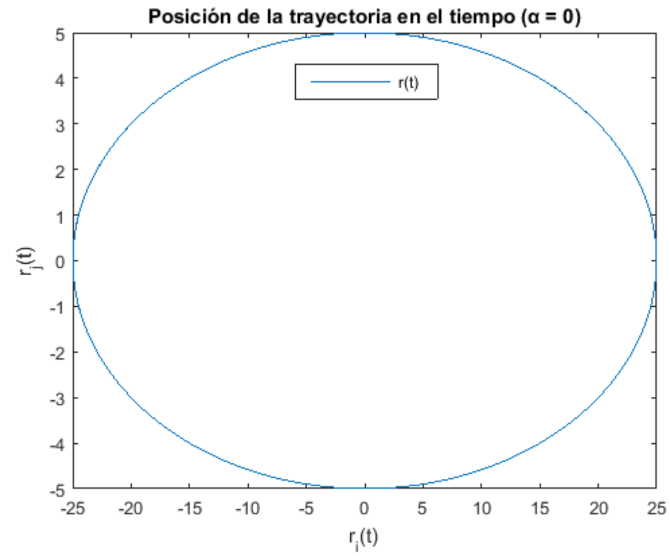
$$\vec{r}(t) = (\frac{1}{\Omega}\|\vec{v_0}\|\cos(\alpha)\sin(\Omega t))\hat{i} + (\|\vec{r_0}\|\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega}\|\vec{v_0}\|\sin(\alpha)\sin(\Omega t))\hat{j}$$

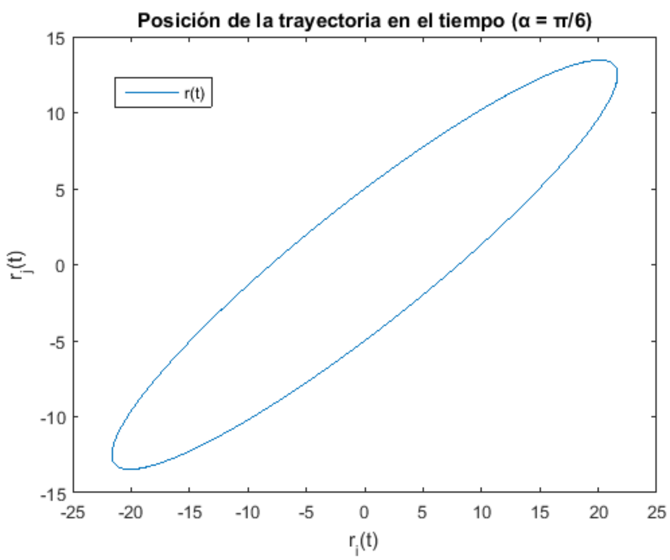
Ahora, para graficar es necesario primero establecer las condiciones iniciales del problema. Utilizaremos los siguientes valores arbitrarios para ello:

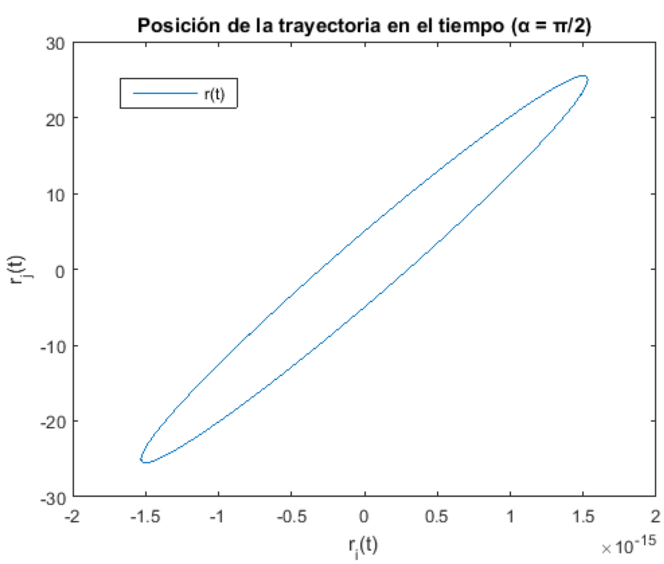
$$\begin{aligned}\|\vec{r_0}\| &= 5\\ \|\vec{v_0}\| &= 10\\ \Omega &= 0{,}4\\ t &= [0, 50]\end{aligned}$$

α lo consideraremos con tres valores distintos para visualizar mejor cómo éste afecta a la trayectoria de la partícula $(0, \pi/6, \pi/2)$.

Así, utilizando el eje descrito por $\hat{i}$ como el horizontal y el descrito por $\hat{j}$ como el vertical, obtenemos los tres gráficos siguientes:


Posición de la trayectoria en el tiempo (α = 0)
r(t)
$r_j(t)$
$r_i(t)$


Posición de la trayectoria en el tiempo (α = π/6)
r(t)
$r_j(t)$
$r_i(t)$


Posición de la trayectoria en el tiempo (α = π/2)
r(t)
$r_j(t)$
$r_i(t)$
$\times 10^{-15}$

(d)

Para encontrar el tiempo que demora la partícula en volver al punto inicial $\vec{r_0}$, es necesario igualar nuestra ecuación itinerario obtenida anteriormente a dicho vector. Sin embargo, con el fin de simplificar los cálculos, haremos por separado dos ecuaciones para cada uno de los ejes. Así, la componente $\hat{j}$ del vector debe ser igual a $\|\vec{r_0}\|$, mientras que la componente $\hat{i}$ debe ser igual a 0.

$$\begin{aligned} 0 &= (\frac{1}{\Omega}\|\vec{v_0}\|\cos(\alpha)\sin(\Omega t)) \\ \|\vec{r_0}\| &= (\|\vec{r_0}\|\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega}\|\vec{v_0}\|\sin(\alpha)\sin(\Omega t)) \end{aligned}$$

Podemos ver directamente que una solución para este sistema de ecuaciones es $t = \frac{2k\pi}{\Omega}$ con $k \in \mathbb{N}$, pues es en ese caso que $\sin(\Omega t) = 0$ y $\cos(\Omega t) = 1$, obteniendo así los resultados que necesitamos independiente del valor de α.

Efectivamente, esta ecuación para el tiempo describe un movimiento cíclico donde se vuelve a pasar infinitas veces por el punto inicial. Pero es importante destacar el hecho de que dicho tiempo es independiente de α. Esto, debido a que la aceleración es el vector más influyente en el movimiento cíclico de la partícula, además de no depender de α y sólo ser proporcional a la posición.

Luego, sólo basta ver que el tiempo correspondiente al final del primer ciclo es el menor posible distinto de 0. Es decir:

$$t = \frac{2\pi}{\Omega}$$