Soluciones
Guía de Problemas 2

FI2001-6 Mecánica
Profesor: Francisco Brieva Rodríguez
Auxiliares: Esteban Aguilera Marinovic
Joaquín Medina Dueñas

Pregunta 1

a)

El vector posición con respecto al centro de la esfera es:

$$\vec{r}(t) = R\hat{r}$$

Derivando respecto a t:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = R\dot{\theta}\hat{\theta} + R\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} = R\omega_0\hat{\theta} + RN\omega_0\sin\theta\hat{\phi}$$

Derivando nuevamente:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) = (-R\omega_0^2 - RN^2\omega_0^2\sin^2\theta)\hat{r} + (-RN^2\omega_0^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + (2RN\omega_0^2\cos\theta)\hat{\phi}$$

b)

Radio de curvatura:

$$R_c = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{v}\times\vec{a}\|}$$

Por un lado, se sabe que $\|\vec{v}\|^3 = (R\omega_0)^3(1 + N^2\sin^2\theta)^{3/2}$

Por otro lado, se tiene que $\|\vec{v}\times\vec{a}\| =$

$$\left\|(2R^2N\omega_0^3\cos\theta + R^2N^3\omega_0^3\sin^2\theta\cos\theta)\hat{r} + (R^2\omega_0^3N\sin\theta + R^2N^3\omega_0^3\sin^3\theta)\hat{\theta} + (R^2\omega0^3 + R^2N^2\omega_0^3\sin^2\theta)\hat{\phi}\right\|$$

$$\|\vec{v}\times\vec{a}\| = R^2\omega_0^3\sqrt{N^2\cos^2\theta(2 + N^2\sin\theta)^2 + (1 + N^2\sin^2\theta)^3}$$

Entonces, aplicando $\theta = \pi/2$ a las ecuaciones, R_c:

$$\frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{v}\times\vec{a}\|} = \frac{R^3\omega_0^3(1+N^2)^{3/2}}{R^2\omega_0^3(1+N^2)^{3/2}} = R$$

Este resultado tiene sentido, pues en el ángulo $\theta = \pi/2$ (mitad de la esfera) el giro de esta partícula bajando es circular de tamaño máximo R. Una forma de verlo es saber que en el ecuador de esta esfera, todas las circunferencias que intersecten este eje tienen el mismo radio. Eso no significa que la partícula viaje haciendo círculos, sino que en el instante puntual en que pasa por el ecuador muestra un giro del tamaño del radio de la esfera (basta evaluar R_c sobre otro ángulo θ y se notará un radio distinto).

c)

Calcular el largo de la curva es sumar cada uno de los segmentos ds (módulos del vector tangente a la curva de cada punto) a lo largo de toda la curva C. Es decir:

$$\int_C ds$$

Pero como la curva no es conocida, se puede utilizar otra parametrización de ds mediante la siguiente definición:

$$\frac{ds}{dt} = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \sqrt{(R\frac{d\theta}{dt})^2 + (R\sin\theta\frac{d\phi}{dt})^2 + (\frac{dR}{dt})^2}$$
$$ds = \sqrt{(R^2\omega_0^2 + R^2\omega_0^2 N^2 \sin^2\theta)}dt$$
$$ds = R\omega_0\sqrt{(1 + N^2\sin^2\theta)}dt$$

Además, como $\dot{\theta} = \omega_0$ con ω_0 una constante. Basta reemplazar $\theta = \omega_0 t$ para generar una dependencia temporal de ds.
Luego se debe definir el intervalo de tiempo para integrar. Es fácil ver que θ es un ángulo que baja desde 0 (en $t_0 = 0$) hasta π para recorrer la esfera completa. Esto más la ecuación $\theta = \omega_0 t$ nos dice que el tiempo final será: $t = \pi/\omega_0$. Así la fórmula del largo de la curva quedará expresada como sigue:

$$\int_C ds = R\omega_0\int_{t=0}^{t=\pi/\omega_0}\sqrt{1 + N^2\sin^2(\omega_0 t)}dt$$

Pregunta 2

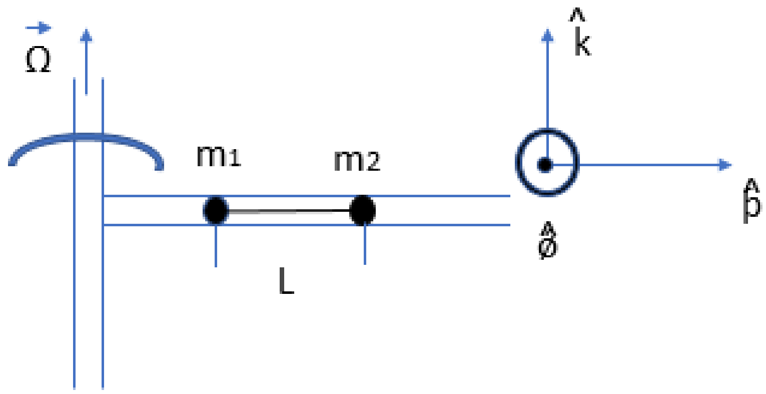

Figura 1: Ejes coordenados

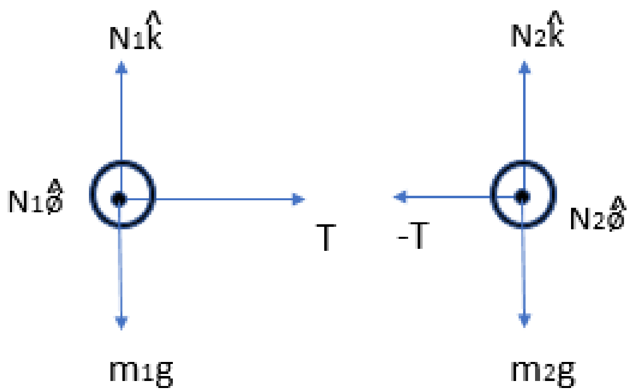

Figura 2: DCL de ambas partículas

a)

Para dar respuesta a la pregunta 2, escribimos las ecuaciones de movimiento:
Datos iniciales: $\dot{\phi} = \vec{\Omega}$
En $t = 0$, la distancia a m_1 es R.
Ecuaciones:

$$\sum F\hat{\rho} : T = m_1(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \| m_2(\ddot{\rho} - (\rho + L)\dot{\phi}^2) = -T$$

$$\sum F\hat{\phi} : m_1(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \cancelto{0}{\rho\ddot{\phi}}) = N_1\hat{\phi} \| m_2(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \cancelto{0}{\rho\ddot{\phi}}) = N_2\hat{\phi}$$

$$\sum F\hat{k} : 0 = N_1\hat{k} - m_1 g \| 0 = N_2\hat{k} - m_2 g$$

Despejando T:

$$T = m_1(\ddot{\rho} - \rho\Omega^2) = -m_2(\ddot{\rho} - (\rho + L)\Omega^2$$

Con $\rho + L$ la distancia entre el eje de rotación y la partícula 2.
Desarrollando, obtenemos:

$$\ddot{\rho} - \Omega^2\rho = \frac{m_2\Omega^2 L}{m_1 + m_2}$$

Por indicación:

$$\rho(t) = A\sinh\Omega t + B\cosh\Omega t - \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

En $t = 0$ tenemos: $\rho(t = 0) = R = B - \frac{m_2 L}{m_1+m_2} => B = R + \frac{m_2 L}{m_1+m_2}$

Luego:

$$\rho(t) = A\sinh\Omega t + (R + \frac{m_2 L}{m_1 + m_2})\cosh\Omega t - \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

En $\dot{\rho}$ con $t = 0$,

$$\dot{\rho}(t) = A\cosh(\Omega t)\Omega + \cancelto{0}{B\sinh(\Omega t)\Omega}$$

Pero $\frac{dR}{dt} = 0 => A = 0$
Finalmente:

$$\rho(t) = \frac{-m_2 L}{m_1 + m_2} + (R + \frac{m_2 L}{m_1 + m_2})\cosh(\Omega t)$$

Con la partícula 2 $\rho_2 = \rho(t) + L$

b)

Usando $m_1(\ddot{\rho} - \rho\Omega^2) = T$

$$\ddot{\rho} = \frac{T}{m_1} + \rho\Omega^2$$

Reemplazando en la ecuación conocida:

$$-m_2(\frac{T}{m_1} + \rho\Omega^2 - (\rho + L)\Omega^2 = -T$$

Desarrollando, se obtiene:

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_2 - m_1} L\Omega^2$$

c)

Como se obtuvo anteriormente, podemos dar respuesta a esta pregunta con la distancia al eje de rotación de acuerdo a la ecuación: Para la partícula 1:

$$\rho(t) = (R + \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}) \cosh \Omega t - \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

Y para la partícula 2:

$$\rho_2(t) = \rho(t) + L = (R + \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}) \cosh \Omega t - \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} + L$$