

Panta Aux 11

P2 | El potencial gravitatorio tiene la forma
$$U = - \frac{GMm}{r}$$

Así la energía se puede escribir

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$$

Como es una fuerza central sabemos que el movimiento es en un plano ($\Sigma \vec{L} = 0$)

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \rightarrow \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

De $\vec{F} = m \vec{a}$ en la coordenada $\hat{\theta}$

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$$

$\Rightarrow$ Así reemplazando en la energía llegamos a.

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{m^2 r^4} \right) - \frac{GmM}{r}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}}_{V_{\text{eff}}(r)}$$

Al derivar en el tiempo

$$\Rightarrow 0 = m \dot{r} \ddot{r} - \frac{l^2 \dot{r}}{mr^3} + \frac{GmM \dot{r}}{r^2}$$

$$\Rightarrow m \ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{GmM}{r^2} \quad \left(\text{Es justamente a lo que llegamos al hacer } F=ma \right)$$

$$m \ddot{r} = -\nabla V_{\text{eff}} \leftarrow -\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r}$$

Al encontrar los mínimos

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r} = 0 \Rightarrow -\frac{l^2}{mr^3} + \frac{GmM}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \left(GmM - \frac{l^2}{mr} \right)$$

De la:

$$6Mm = \frac{l^2}{mr} \Rightarrow r_{\text{estable}} = \frac{l^2}{m^2 H b}$$

y de ahí $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{l^2}{mr^3} + \frac{6Mm}{r^2} \right) = \frac{3l^2}{mr^4} - \frac{2 \cdot 6Mm}{r^3}$$

$$\text{Para } r = \frac{l^2}{m^2 H b}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{r^*} &= \frac{1}{r^3} \left(\frac{3l^2}{mr} - 2 \cdot 6Mm \right) \Big|_{r^*} \\ &= \frac{(m^2 H b)^3}{l^6} \left(\frac{3 \cancel{l^2}}{\cancel{m} \cancel{r}} - 2 \cdot 6Mm \right) \\ &= \frac{(m^2 H b)^3 (6mH)}{l^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \omega^2 &= \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}}{\alpha} ; \quad \text{Como } K = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \\ &\quad \text{y } K = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2 \Rightarrow \boxed{\alpha = m} \end{aligned}$$

⑦ la notación $K = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2$ es que q es la variable ~~para~~

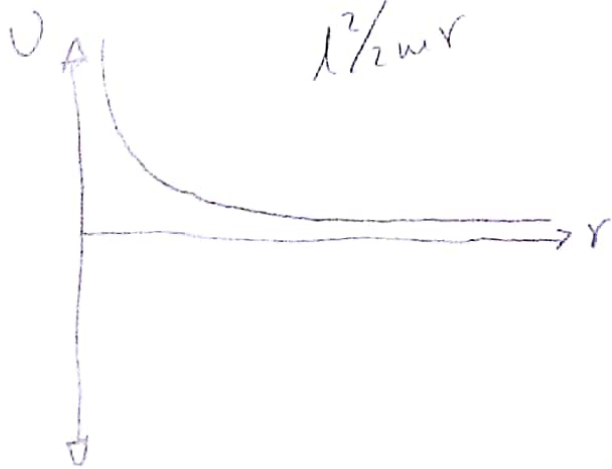
Por ejemplo para $K = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow q = \theta$
 $\alpha = m R^2$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{64 \pi^4}{\hbar^3} \left(\frac{m^2 H G}{l^2} \right)^3 \Rightarrow \frac{6M}{r_*^3}$$

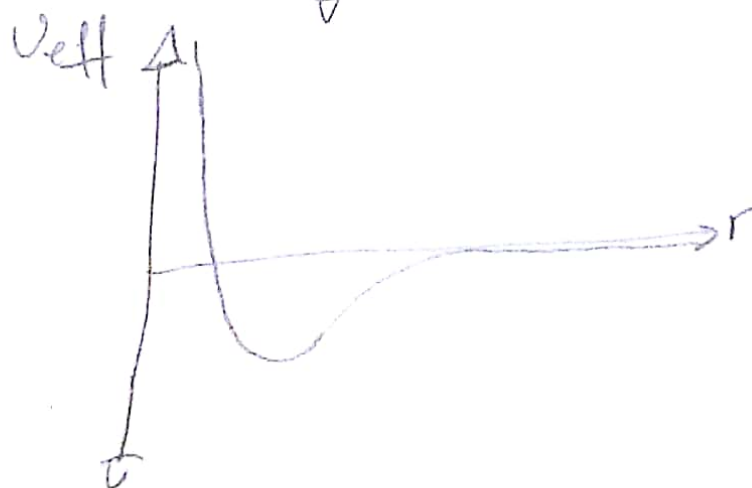
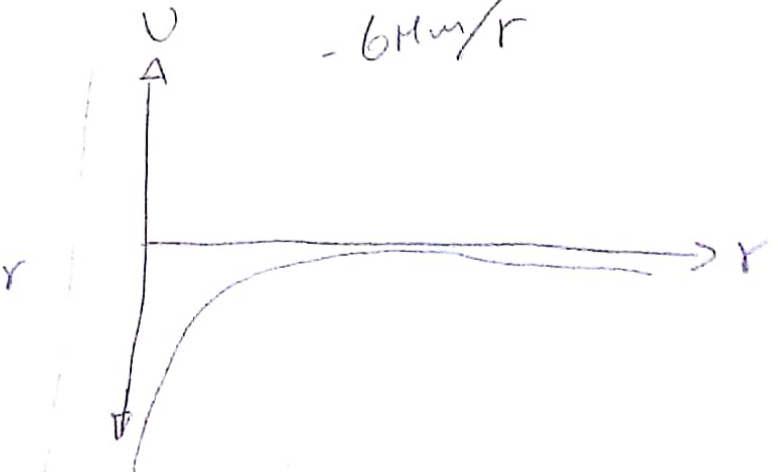
$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{6M}{r_*^3}}$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{6Mm}{r}$$

$$- 6Mm/r$$

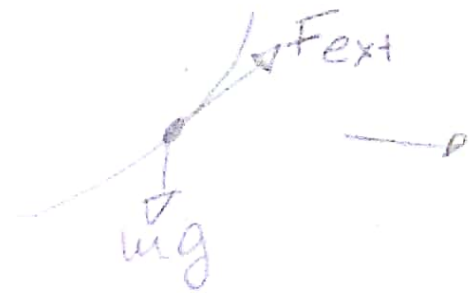
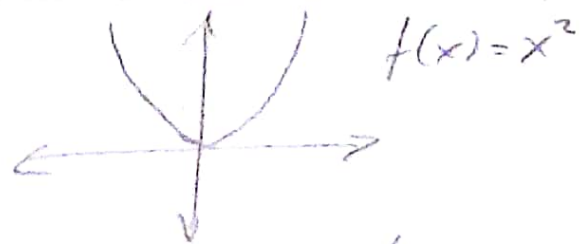


$$l^2/2mr$$



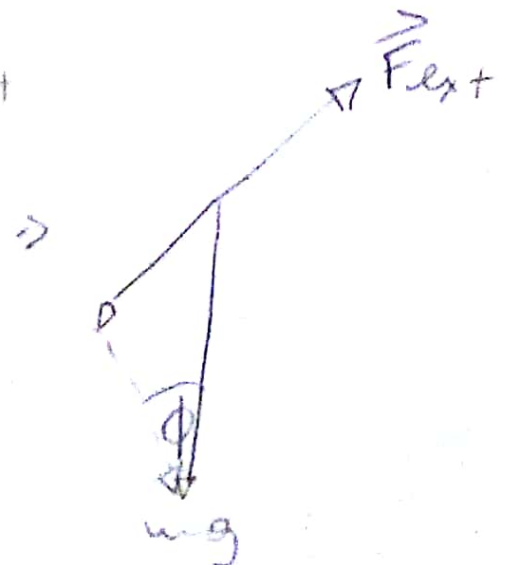
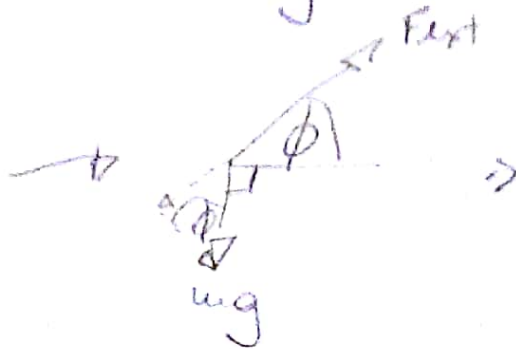
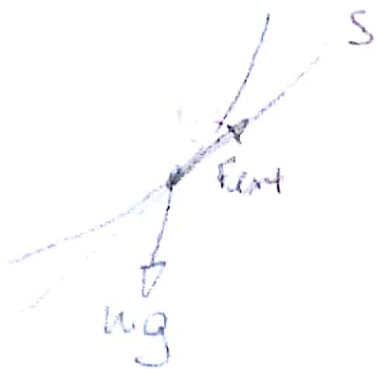
⊕ Mas cerca de $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r} < \frac{1}{r}$; por lo que la resta da mas grande al ir mas cerca de 0, mientras que mas a $+\infty$ $\frac{1}{r^2} < \frac{1}{r}$, por lo que la resta es negativa.

P1/ $\vec{v} \cdot \vec{v} = v_0^2$



$$\Rightarrow \tan \phi = \frac{dy}{dx} = 2x$$

Como solo nos importa $\vec{F}_{ext}$, vamos a ver solo la aceleracion en ese eje



y como la velocidad es constante, se debe tener que

$$F_{ext} + m\vec{g} \cdot \hat{s} = 0$$

↑
eje tangente a la parabola
y $m\vec{g} \cdot \hat{s} = -mg \sin \phi$

$\Rightarrow F_{ext} = mg \sin \phi$; ¿cuanto vale $\sin \phi$?

Sabemos $\tan \phi = 2x$ y $\sec \phi = \sqrt{1 + \tan^2 \phi}$

$$\Rightarrow \sec \phi = \sqrt{1 + 4x^2}; \text{ y } \frac{1}{\cos \phi} = \sec \phi$$

$$\Rightarrow \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} \Rightarrow \sin \phi = \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

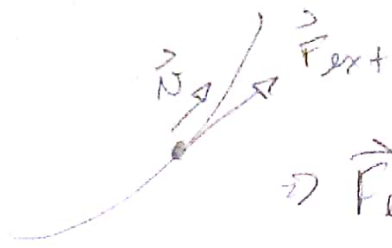
$\tan \phi = 2x$

$$\text{Así } F_{ext} = mg \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

Ya estamos a medio camino, por ahora tenemos el módulo de F_{ext} , falta su ~~de~~ dirección y sentido para saber $\vec{F}_{ext}$ y calcular

$$W = \int \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l}$$

Sabemos que $\vec{F}_{ext} \parallel \vec{v}$, por el dibujo



$$\Rightarrow \vec{F}_{ext} = F_{ext} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

y ademas $d\vec{l} \parallel \vec{v}$, y $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$

$$\text{como } y = x^2 \Rightarrow \dot{y} = 2x\dot{x}$$

$$\text{y como } \|\vec{v}\| = v_0 \Rightarrow \sqrt{\dot{x}^2 + 4x^2\dot{x}^2} = v_0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{v_0}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ext} = \frac{mg 2x}{\sqrt{1+4x^2}} \cdot \frac{\dot{x}(\hat{x} + 2x\hat{y})}{v_0}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ext} = \frac{mg 2x}{\sqrt{1+4x^2}} \frac{(\hat{x} + 2x\hat{y})}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Ademas } d\vec{l} &= dx\hat{x} + dy\hat{y} \quad / \quad y = x^2 \\ &= dx\hat{x} + 2x dx\hat{y} \\ &= (\hat{x} + 2x\hat{y})dx \end{aligned}$$

Así al hacer producto punto

$$\vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = \frac{mg(2x)(\hat{x} + 2x\hat{y}) \cdot (\hat{x} + 2x\hat{y})dx}{(1+4x^2)}$$

$$= \frac{mg(2x) \cdot (1+4x^2)dx}{(1+4x^2)}$$

$$= mg(2x)dx$$

$$\Rightarrow W = \int \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 mg(2x)dx = mg$$

Ademas

$$\int mg(2x)dx = \int mg dy = mgy \Big|_{\text{inicio}}^{\text{final}} = \Delta U$$

$\uparrow$
 $y = x^2$

$\uparrow$
cambio en
la energía
potencial
gravitatoria

Todo calza!! $\rightarrow$