

Pauta Aux 7



$M\ddot{y} = \sum F_y$ [Solo veremos en $[y]$, ya que es por el eje que se mueve]

$$\Rightarrow M\ddot{y} = -v\dot{y} + Mg - \underbrace{k(y - L_0)}$$

El signo es para que para valores de y grandes la fuerza sea negativa (que tire para arriba)

a) Para una posición de equilibrio se tiene

$$\ddot{y} = 0 = \dot{y}$$

$$\Rightarrow 0 = Mg - k(y_e - L_0) \Rightarrow y_e = L_0 + \frac{Mg}{k}$$

$$b) M\ddot{y} = -v\dot{y} + \underbrace{Mg - k(y - L_0)}_{-k(y - (L_0 + \frac{Mg}{k}))}$$

Hacemos un cambio de variable

$$z = y - (L_0 + \frac{Mg}{k}) \rightarrow \text{Notar que la posición de equilibrio es en } z = 0$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \dot{y}$$

$$\ddot{z} = \ddot{y}$$

$$\Rightarrow M\ddot{z} = -v\dot{z} - Kz$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{v}{M}\dot{z} + \frac{K}{M}z = 0$$

Obteniendo polinomio característico

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{v}{M}\lambda + \frac{K}{M} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-\frac{v}{M} \pm \sqrt{\frac{v^2}{M^2} - \frac{4K}{M}}}{2}$$

Pensando en λ_+ = Solución con signo mas
y λ_- con signo menos

$$\Rightarrow z = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \quad // \quad z = y - \left(L_0 + \frac{Mg}{K} \right)$$

$$\Rightarrow y = L_0 + \frac{Mg}{K} + Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}$$

c) Para que oscile, las soluciones del polinomio deben ser imaginarias

$$\Rightarrow \frac{v^2}{M^2} - \frac{4K}{M} < 0 \Rightarrow \boxed{v^2 < 4KM}$$

d) Si pensamos en $\frac{v}{2M} = \frac{1}{\tau}$; además

vamos a ver que pasa si oscila, o si no

$$\underbrace{\omega^2 = \frac{K}{M} - \frac{v^2}{4M^2}}_{\text{oscila}}, \quad \underbrace{\Omega^2 = \frac{v^2}{4M^2} - \frac{K}{M}}_{\text{No oscila}}$$

Para la situación en que oscila

$$y = L_0 + \frac{Mg}{k} + e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

Al tener soluciones imaginarias
pasamos a la solución de
seno y cos

$$\text{En } t=0; y(0)=L_0$$

$$\Rightarrow L_0 = L_0 + \frac{Mg}{k} + A \Rightarrow \boxed{A = -\frac{Mg}{k}}$$

$$\text{Para } y(0)=0$$

$$y(t) = \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \\ + e^{-\frac{t}{\tau}} (-A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t)$$

$$\text{Para } t=0; y(0)=0$$

$$0 = -\frac{A}{\tau} + B \omega \Rightarrow B = \frac{A}{\tau \omega} = \frac{-Mg}{k \omega \tau}$$

$$B = \frac{-Mg}{k \omega \tau}$$

$$\Rightarrow y = L_0 + \frac{Mg}{k} - \frac{Mg}{k} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{\tau \omega} \right)$$

Al hacer $t \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = L_0 + \frac{Mg}{k}$$

Para la ~~solución~~ solución no oscilante

$$\Rightarrow y = L_0 + \frac{Mg}{k} + e^{-\frac{t}{\tau}} (A e^{\Omega t} + B^{-\Omega t})$$

Podemos adivinar que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = L_0 + \frac{Mg}{k}$,
basicamente, que no importe si oscila
o no, en $t \rightarrow +\infty$ llega al mismo
punto, lo que suena logico

$$\text{Asi } \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} L_0 + \frac{Mg}{k} + A e^{(\Omega - \frac{1}{\tau})t} + B e^{-(\Omega + \frac{1}{\tau})t}$$

Se va
a 0

Solo debemos confirmar que $\Omega - \frac{1}{\tau} < 0$,
para que asi su exponente sea
negativo y en $t \rightarrow +\infty$ se vaya a 0

$$\Omega = \sqrt{\frac{v^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}, \text{ pensamos que } \frac{k}{M} > 0$$

$$\Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{v^2}{4M^2} - \frac{k}{M}} < \sqrt{\frac{v^2}{4M^2}} = \frac{v}{2M} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \Omega < \frac{1}{\tau}$$

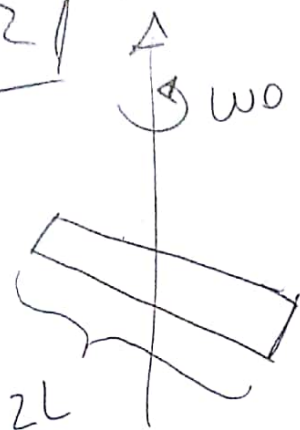
Asi el exponente sera negativo

$$\Rightarrow e^{(\Omega - \frac{1}{\tau})t} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = L_0 + \frac{Mg}{k}$$

[Recordar que aca $\frac{v^2}{4M^2} - \frac{k}{M} > 0$, ya que
es el caso que no oscila]

P21



μ Desplazamos coordenados cilíndricas

$$\dot{\phi} = \omega_0$$

$$\sum \vec{F}: -Mg \hat{k} + N_{\phi} \hat{\phi} + N_z \hat{k} - \underbrace{|N|\mu \hat{r}}$$

Pensando en que la partícula va saliendo del tubo

Como para $\hat{\phi}$ hay una sola fuerza, y es independiente de los otros, empezare por ahí. (Notar que $|N| = \sqrt{N_z^2 + N_{\phi}^2}$)

$$\Rightarrow M \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \omega_0) = N_{\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{2 \dot{\rho} \omega_0 M = N_{\phi}}$$

Para $\hat{k}$, $z = \text{constante}$; $\dot{z} = 0$; $\ddot{z} = 0$

$\Rightarrow N_z = Mg$ — Como no hay gravedad podemos pensar en $g = 0$

Para $\hat{r}$

$$M(\ddot{\rho} - \rho \omega_0^2) = -|N|\mu = -2 \dot{\rho} \omega_0 M \mu$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} + 2 \dot{\rho} \omega_0 \mu - \omega_0^2 \rho = 0$$

$$\ddot{\rho} + 2\dot{\rho}\omega_0\mu - \omega_0^2\rho = 0$$

⇒ Polinomio característico

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\omega_0\mu\lambda - \omega_0^2 = 0 \quad / + \omega_0^2\mu^2$$

$$\Rightarrow (\lambda + \omega_0\mu)^2 = \omega_0^2(1 + \mu^2)$$

$$\Rightarrow \lambda = -\omega_0\mu \pm \omega_0\sqrt{1 + \mu^2}$$

$$\Rightarrow \rho = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}$$

$$\text{Para } t=0 \Rightarrow \rho=0 \Rightarrow \boxed{A+B=0}$$

Para $\dot{\rho}$, sabemos que vale v_0 , ya que el impulso que se da, para que tenga sentido debe ser en la dirección $\hat{\rho}$

$$\dot{\rho} = A\lambda_+ e^{\lambda_+ t} + B\lambda_- e^{\lambda_- t}$$

$$\dot{\rho}(0) = v_0$$

$$\Rightarrow v_0 = A\lambda_+ + B\lambda_-$$

$$\lambda_+ = -\omega_0\mu + \omega_0\sqrt{1 + \mu^2}$$

$$\lambda_- = -\omega_0\mu - \omega_0\sqrt{1 + \mu^2}$$

$$\Rightarrow v_0 = \underbrace{-\omega_0\mu(A+B)}_0 + \omega_0\sqrt{1 + \mu^2}(A - B)$$

$$\Rightarrow \boxed{A - B = \frac{v_0}{\omega_0\sqrt{1 + \mu^2}}}$$

$$\Rightarrow A + B = 0$$

$$A - B = \frac{N_0}{\omega_0 \sqrt{1 + \mu^2}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{N_0}{2\omega_0 \sqrt{1 + \mu^2}} \Rightarrow B = -\frac{N_0}{2\omega_0 \sqrt{1 + \mu^2}}$$

$$\Rightarrow p(t) = A e^{\lambda_+ t} + B e^{\lambda_- t}$$

$$\Rightarrow p(t) = A e^{(-\omega_0 \mu + \omega_0 \sqrt{1 + \mu^2})t} + B e^{(-\omega_0 \mu - \omega_0 \sqrt{1 + \mu^2})t}$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{N_0 e^{-\omega_0 \mu t}}{2\omega_0 \sqrt{1 + \mu^2}} \left(\frac{e^{\omega_0 \sqrt{1 + \mu^2} t} - e^{-\omega_0 \sqrt{1 + \mu^2} t}}{2 \sinh(\omega_0 \sqrt{1 + \mu^2} t)} \right)$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{N_0 \sinh(\omega_0 \sqrt{1 + \mu^2} t) e^{-\omega_0 \mu t}}{\omega_0 \sqrt{1 + \mu^2}}$$

Se va a $+\infty$ o converge?

hay dos funciones que cambian en el tiempo
 $e^{-\omega_0 \mu t - \omega_0 \sqrt{1 + \mu^2} t}$ que se va a 0

y $e^{-\omega_0 \mu t + \omega_0 \sqrt{1 + \mu^2} t}$

Notar que $-\omega_0 \mu + \omega_0 \sqrt{1 + \mu^2} > 0$ ya que $\sqrt{1 + \mu^2} > \mu$
 por lo que esa componente se va a infinito
 por lo que a priori no hay solución

Entonces, ¿Por qué en la realidad si se detiene?

- (*) La fuerza que frena a la partícula depende de la frecuencia (ω_0), pero también hay una fuerza ficticia que lo tira para afuera que depende de la frecuencia. Al agregar gravedad, el freno es mayor, por lo que pueden haber soluciones que no se vayan a $+\infty$, dependiendo de los parámetros

Ejercicio Extra (*) (□) (😊)
Sacar los puntos estables e inestables, y ver la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a puntos estables, al agregar gravedad.

Hint:

Damper Taylor xD

Notar que el ejercicio extra ocupa poco y pequeñas oscilaciones, lo que no entra en la prueba (hasta ahora).

Solo si estan oscuros hacerlo