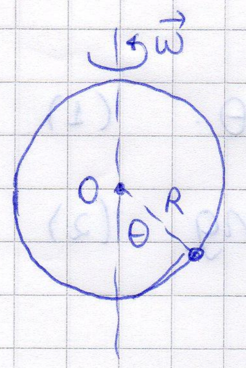
Ejercicio 2.

P21



$R, \dot{\phi} = \omega$ datos.

O: origen del sistema.

Coordenadas cilíndricas. $\rho = R\operatorname{sen}\theta$, $z = -R\cos\theta$.

Las condiciones del sistema tienen que ser tales que θ sea constante, es decir, $\dot{\rho} = \dot{z} = 0$

Así,

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} = R\operatorname{sen}\theta\,\hat{\rho} - R\cos\theta\,\hat{z}$$

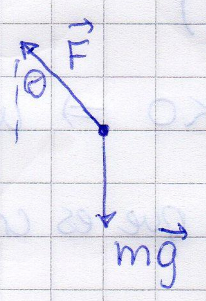
$$\vec{v} = R\operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} = R\omega\operatorname{sen}\theta\,\hat{\phi}$$

$$\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\operatorname{sen}\theta\,\hat{\rho}}$$

→ solo nos importan las fuerzas que tengan una componente en esta dirección.

Donde $\dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi}\hat{\phi} = \omega\hat{\phi}$ $\quad \dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{\rho} = \boxed{-\omega\hat{\rho}}$

DCL



La intuición nos dice que hay una fuerza "F" en esa dirección.

$$\vec{F} = F\cos\theta\,\hat{z} - F\operatorname{sen}\theta\,\hat{\rho}$$

$$\vec{P} = -mg\hat{z}$$

Debe tener una componente en $\hat{z}$ para anular el peso y una componente en $\hat{\rho}$ porque hay aceleración.

Usando $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$

Eje $\hat{\rho}$: $-mR\omega^2 \operatorname{sen}\theta = -F\operatorname{sen}\theta$ (1)

Eje $\hat{z}$: $m \cdot 0 = F\cos\theta - mg$ (2)

De (2)

$$F = \frac{mg}{\cos\theta}.$$

En (1)

$$\cancel{m}R\omega^2\cancel{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\cancel{\operatorname{sen}\theta}.$$

Independiente de la masa. $\rightarrow$ $\boxed{\omega^2 = \frac{g}{R\cos\theta}}$.

Si $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$

$$\omega^2 = \frac{g}{R}.$$

Debe cumplirse que $\omega^2 > 0 \Rightarrow \frac{g}{R\cos\theta} > 0.$

$\Rightarrow \cos\theta > 0$

Esto ocurre en $\theta \in (0, \pi/2)$

Para $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ $\cos\theta < 0 \Rightarrow \omega^2 < 0 \rightarrow$ no puede ser!

Entonces hay un valor para θ que es crítico.

$\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0.$

Con esto $\omega^2 \rightarrow \infty$, es decir, para que la masa alcance $\theta = \frac{\pi}{2}$ el aro debe girar con velocidad infinita!

En esféricas. $r = R$.

La configuración del sistema es tal que la aceleración es.

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 sen^2\theta)\hat{r}$$

$$+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta)\hat{\theta}$$

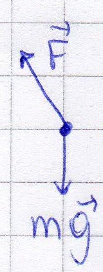
$$+ (r\ddot{\phi}\, sen\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\, sen\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{\phi}$$

Los vectores unitarios cambian en su definición solo la componente $\hat{z}$, con respecto al formulario. Pero la aceleración es la misma. y coincide el ángulo en la vertical.

Entonces $\dot{r} = \ddot{r} = \ddot{\phi} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$.

$$\Rightarrow \vec{a} = -Rw^2 sen^2\theta\,\hat{r} - Rw^2 sen\theta\cos\theta\,\hat{\theta}$$

<u>DCL</u>



$$\vec{F} = -F\hat{r}$$

$$\vec{P} = -mg\hat{z} = -mg(sen\theta\,\hat{\theta} - \cos\theta\,\hat{r})$$

$$= -mg\,sen\theta\,\hat{\theta} + mg\cos\theta\,\hat{r}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\hat{r}| \quad -mR\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta = -F + mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$\hat{\theta}| \quad -mR\omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = -mg\operatorname{sen}\theta \qquad (2)$$

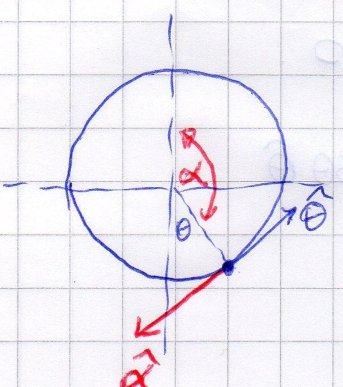
De (2)

$$R\omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = g\operatorname{sen}\theta$$

$$\theta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \frac{g}{R\cos\theta}}$$

Nota

Si consideraban α el ángulo θ del formulario.



$$\cos\alpha = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta.$$

$$\hat{\theta} = -\hat{\alpha}$$

Entonces la aceleración era

$$\vec{a} = -R\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha\,\hat{r} - R\omega^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,\hat{\alpha}$$

$$= -R\omega^2\operatorname{sen}^2\theta\,\hat{r} - R\omega^2\operatorname{sen}\theta(-\cos\theta)(-\hat{\theta})$$

$$= -R\omega^2\operatorname{sen}^2\theta\,\hat{r} - R\omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\hat{\theta}.$$