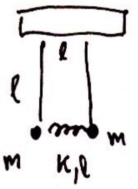
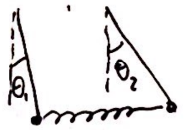
Pauta Aux 20

P1





Podemos hacer $L \to \lambda L$?
(Análogo a $L \to L + a$)

$T = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \quad v_1^2 = l^2 \dot\theta_1^2, \; v_2^2 = l^2 \dot\theta_2^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2) \qquad U_k = \frac{1}{2} k (l \sin\theta_2 - l \sin\theta_1)^2$

$U_g = -mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \Rightarrow L = \frac{1}{2} m l^2 (\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2) + mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) - \frac{1}{2} k l^2 (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2$

$\underline{\theta_1|} \quad m l^2 \ddot\theta_1 = -mgl \sin\theta_1 - k l^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 + k l^2 \sin\theta_2 \cos\theta_1 \qquad (1)$

$\underline{\theta_2|} \quad m l^2 \ddot\theta_2 = -mgl \sin\theta_2 - k l^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 + k l^2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \qquad (2)$

(1), con $\sin\theta \approx \theta$, nos da $l\ddot\theta_1 = -g\theta_1 - \frac{k}{m} l \theta_1 \cos\theta_1 + \frac{k}{m} l \theta_2 \cos\theta_1$

$\cos\theta_1, \cos\theta_2 \approx 1$ porque van acompañados de θ_1, θ_2, y queremos a lo más orden 2.

Entonces (1) y (2) se convierten en

$$\begin{pmatrix} \ddot\theta_1 \\ \ddot\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{g}{l}\theta_1 - \frac{k}{m}\theta_1 + \frac{k}{m}\theta_2 \\ -\frac{g}{l}\theta_2 - \frac{k}{m}\theta_2 + \frac{k}{m}\theta_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Frec. de oscilación? Asumir $\theta_1 = A e^{i\omega t}$, $\theta_2 = B e^{i\omega t} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot\theta_1 \\ \ddot\theta_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ encontrar autovalores de A!

$$\det[A - \lambda I] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \lambda & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \lambda = \pm \frac{k}{m} \Rightarrow \lambda = \begin{cases} g/l \\ g/l + 2k/m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Frec. de oscilación propias son $\boxed{\sqrt{\frac{g}{l}}, \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}}$

Interpretación física! ⍨

Modos normales: autovectores de A.

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) a - \frac{k}{m} b = \omega^2 a \\ -\frac{k}{m} a + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) b = \omega^2 b \end{array}$$

Para $\omega^2 = \frac{g}{l}$, $a = b \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ es modo normal. Para $\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$, $a = -b \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

que se escribe equivalentemente como

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = \omega_0^2\,Q\,\sin\omega t \tag{5.5.1}$$

El último término es el que describe a la *forzante* periódica.

Tal como se comentó en la sección 5.3 estas ecuaciones lineales inhomogéneas tienen una solución general que se obtiene de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea (en este caso la del oscilador amortiguado sin forzar) más una solución particular de la ecuación inhomogénea.

Puesto que ya se conoce la solución general del oscilador amortiguado sin forzar solo resta calcular una solución de la ecuación inhomogénea (5.5.1). Ésta será obtenida a partir de suponer que existe una solución $x(t)$ de la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= A\,\sin(\omega\,t-\delta) \\ &= A\,(\sin\omega t\cos\delta - \cos\omega t\sin\delta) \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

De donde es directo obtener que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,\omega\,(\cos\omega t\cos\delta + \sin\omega t\sin\delta) \\ \ddot{x}(t) &= -A\,\omega^2\,(\sin\omega t\cos\delta - \cos\omega t\sin\delta) \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

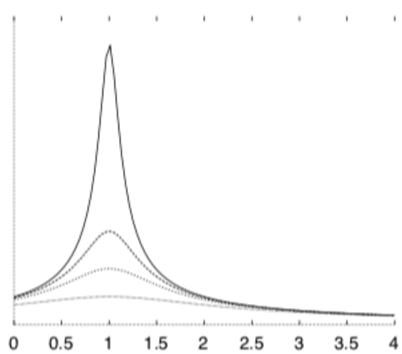


Figura 5.14: *La amplitud $A(w)$, dada en (5.5.7) de un oscilador de frecuencia natural ω_0, amortiguado y forzado por una fuerza periódica con frecuencia ω (la* forzante*) muestra para diversos valores del parámetro de amortiguación q un máximo (resonancia) en $w = w_r$ (definido en (5.5.8)). La amplitud es presentada como función de ω/ω_0.*

En lo que sigue, en lugar de usar c, se va a usar un parámetro q, que por definición es

$$q \equiv \frac{c\,\omega}{m} \tag{5.5.4}$$

para describir el amortiguamiento.

Al reemplazar estas expresiones en (5.5.1) se obtiene una ecuación que se factoriza en dos partes, una proporcional a $\cos\omega t$ y otra proporcional a $\sin\omega t$. Puesto que esta ecuación debe ser válida para todo tiempo, cada una de estas dos partes debe ser nula independientemente y se obtiene

$$\begin{aligned} q\,\cos\delta &= \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\,\sin\delta \\ \omega_0^2\,Q &= A\,\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\,\cos\delta + q\,\sin\delta\right] \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

De la primera de estas ecuaciones se despeja inmediatamente que

$$\tan\delta = \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

y por lo tanto

$$\sin\delta = \frac{q}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + q^2}}, \qquad \cos\delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + q^2}}. \tag{5.5.6}$$

Si el coeficiente de roce viscoso c se anula, es decir, $q = 0$, entonces el seno se anula y el coseno vale 1.

De (5.5.5) resulta (comparar con (5.3.5))

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega_0^2\,Q}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\,\cos\delta + q\,\sin\delta} \\ &= \frac{\omega_0^2\,Q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + q^2}} \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

y ahora se ve que el primer término en el denominador es siempre positivo tal como el segundo término. A menor el amortiguamiento mayor es la amplitud A.

De aquí que la amplitud A nunca es divergente. Su forma, como función de ω, se muestra en la figura 5.14. La función A tiene un máximo cuando

$$\omega^2 = \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\left(\frac{c}{2m}\right)^2 \tag{5.5.8}$$

Esto contrasta con lo que ocurre con el oscilador forzado sin amortiguación donde la amplitud que resulta matemáticamente es divergente en la resonancia.

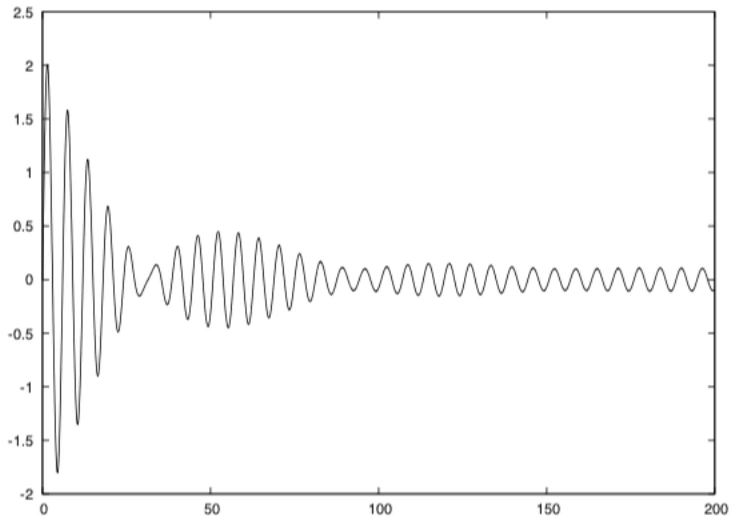


Figura 5.15: *La función $x(t)$ de un oscilador de frecuencia natural ω_0, amortiguado y forzado por una fuerza periódica con frecuencia ω (la* forzante*) muestra un comportamiento inicial transitorio, pudiendo haber batido en la etapa inicial.*

El valor de A en el punto $\omega = \omega_r$ es

$$A = \frac{\omega_0 Q m}{c} \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{4m^2}}} \tag{5.5.9}$$

que diverge en el caso de un oscilador forzado y no amortiguado, es decir, cuando $c \to 0$.

La solución general de la ecuación del oscilador forzado y amortiguado se expresa como la solución general de la ecuación homogénea más la solución particular recién obtenida. Suponiendo que no hay sobreamortiguación esta solución es

$$\begin{aligned} x(t) &= D \cos\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} + \beta\right) \exp\left[-\frac{c}{2m}\,t\right] \\ &\quad + \frac{\omega_0^2\, Q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega c}{m}\right)^2}} \sin(\omega\, t - \delta) \end{aligned} \tag{5.5.10}$$

La primera parte de esta expresión, que proviene de la ecuación lineal homogénea (oscilador no forzado), decrece con el tiempo en forma exponencial. De aquí es claro que a tiempos largos la solución que domina sin competencia es la parte proporcional a $\sin(\omega\, t - \delta)$. A largo plazo la forzante impone totalmente la frecuencia de oscilación.

En particular, si a la solución (5.3.6) se le impone las condiciones genéricas: $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$, las constantes A y B se determinan y toman la forma

$$x = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{\omega_0^2(v_0 - Q\omega) - \omega^2 v_0}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\omega_0 t + Q\,\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\omega t$$

Si se toma el límite $\omega \to \omega_0$ se obtiene

$$x = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\omega_0 t + \frac{Q}{2} \left(\sin\omega_0 t - \omega_0 t \cos\omega_0 t\right) \qquad (5.3.7)$$

que es idéntica a la solución que se obtiene de resolver la ecuación inicial reemplazando primero ω por ω_0. La solución (5.3.7) muestra en detalle la forma como la solución es, a la larga, dominada por el término

$$\frac{Q}{2}\,\omega_0 t\,\cos\omega_0 t$$

que diverge en el tiempo.

El movimiento descrito por (5.3.6) es una primera forma de ver un fenómeno de enorme importancia práctica llamado *resonancia*. Cuando la frecuencia de una forzante ω coincide (o es muy parecida) a la frecuencia natural ω_0 del sistema, se produce una *resonancia*. Desde el punto de vista meramente matemático (5.3.6) es divergente si $\omega \to \omega_0$. En la práctica, como se discutirá más adelante, el sistema oscila mucho más fuertemente.