Compilado de Ejercicios

Profesora: María Luisa Cordero
Auxiliares: M. Ignacia Reveco, Martín Valderrama, Matías Vergara

26 de agosto 2018

P1. [Propagación de errores] Un péndulo simple se usa para medir la aceleración de gravedad, usando:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{1}$$

El periodo medido es $T = 1,51 \pm 0,03[s]$ y la longitud, $L = 56,7 \pm 0,2[cm]$. ¿Cuál es el valor resultante de g y su error absoluto y relativo?

P2. [Métodos Numéricos] Considere una partíıcula de masa m que se mueve en una dimensión sometida a una fuerza F. Una manera alternativa de expresar la segunda ley de Newton para la partícula es escribir el par de ecuaciones para la posición x y velocidad v,

$$\dot{x} = v\dot{v} = F/m \tag{2}$$

Se pide que escriba un algoritmo de Verlet para encontrar de manera iterativa la posición y la velocidad de la partícula a partir de una posición y velocidad inicial (x_0, v_0, respectivamente), suponiendo que la fuerza depende de la posición de la partícula, $F = F(x)$. Se sugieren los siguientes pasos:

a) Utilice la derivada discreta centrada para escribir la recurrencia para la posición de la partícula en los instantes de tiempo pares usando velocidades en tiempos impares. Es decir, escriba $x_{2(i+1)}$ a partir de x_{2i} y v_{2i+1}.

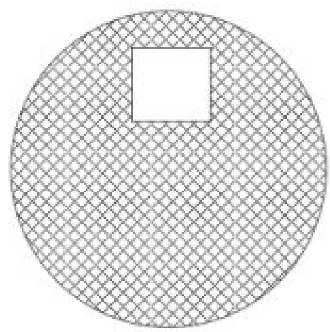
b) Utilice la derivada discreta centrada para escribir la recurrencia que permite encontrar la velocidad en los instantes de tiempo impares usando posiciones en tiempos pares. Es decir, escriba v_{2i+1} a partir de v_{2i-1} y x_{2i}.

c) A partir de las condiciones iniciales x_0 y v_0, explique cómo inicializar las relaciones de recurrencia encontradas.

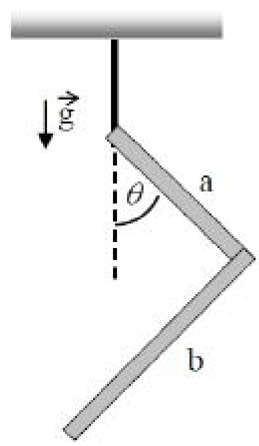
d) Se sabe que al soltar una partícula de masa m unida a un resorte de constante elástica k desde el reposo con el resorte estirado en una longitud x_0, entonces la partícula realiza oscilaciones con respecto a su posición de equilibrio con un período $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ y amplitud x_0. La solución exacta es $x(t) = x_0 cos(\sqrt{k/m}t)$. Utilice el algoritmo de Verlet desarrollado en las partes anteriores para encontrar la trayectoria de la partícula. Considere los valores $m = 1kg$, $k = 1N/m$, $x_0 = 1m$

y $v_0 = 0$. Indique un valor del paso de tiempo suficientemente pequeño para que el resultado de las iteraciones sea preciso y un valor del paso de tiempo suficientemente grande como para que el resultado no corresponda con el movimiento real de la partícula. Justifique la elección de estos valores. Realice tres iteraciones con ambos pasos de tiempo de manera de obtener x_6 y v_7.

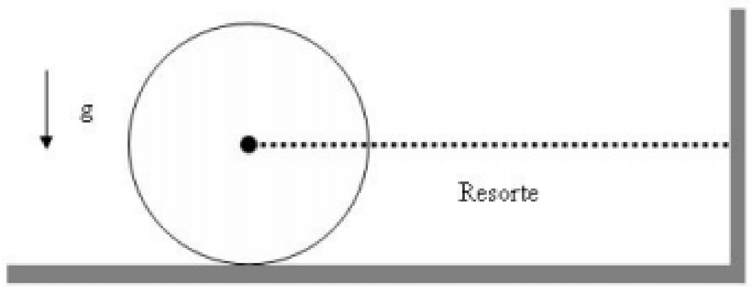
P3. [Sistemas Extendidos] En la figura se muestra un círculo uniforme de radio R con una perforación cuadrada como se indica. La longitud de cada lado del cuadrado es b y su centro dista $R/2$ del centro del círculo. Determine la ubicación del centro de masas del círculo perforado.



P4. [Sólidos Rígidos - Estática] Considere una escuadra formada por dos barras uniformes de igual densidad de masa ρ, y de largos a y b respectivamente, unidas de modo que forman un ángulo recto y que cuelga con un hilo desde el cielo. Las longitudes de la escuadra satisfacen la relación $b^2 = a^2 + 2ab$. Determine el ángulo θ que forma la estructura con la vertical cuando se encuentra en equilibrio



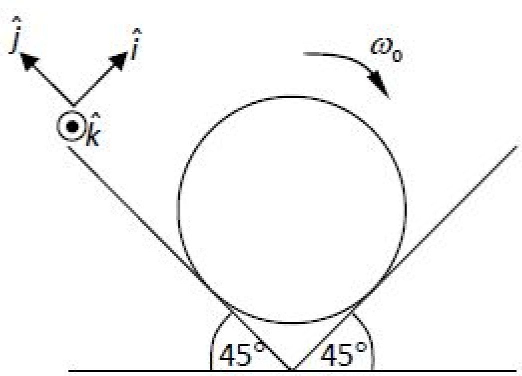
P5. [Sólidos Rígidos - Energía Cinética de Rotación] Un disco de radio R y masa M puede rodas sin resbalar sobre una superficie horizontal rugosa. El centro del disco está enganchado a un resorte de constante elástica k. Inicialmente, el resorte se encuentra en su largo natural, y súbitamente el centro de masa del disco adquiere una velocidad v_0, tal que el resorte se comienza a comprimir. Calcule la compresión máxima del resorte, y compare con el valor que obtendría si en vez del disco, se tratara de una partícula de masa M sin roce con la superficie. Considere que el momento de inercia de una disco de masa M y radio R con respecto a su centro de masas es $\frac{1}{2}MR^2$.



P6. [Sólidos Rígidos - Torque y Momento Angular] Una esfera de radio R, masa M y momento de inercia $I = 2MR^2/5$ está apoyada sobre una cuña recta rugosa, caracterizada por un coeficiente de roce dinámico μ_d. En el instante inicial, a la esfera se le da una velocidad angular ω_0 en la dirección que indica la figura.

a) Determine la magnitud de todas las fuerzas externas que actúan sobre la esfera.

b) Calcule cuánto tiempo tarda en detenerse la esfera debido al roce.

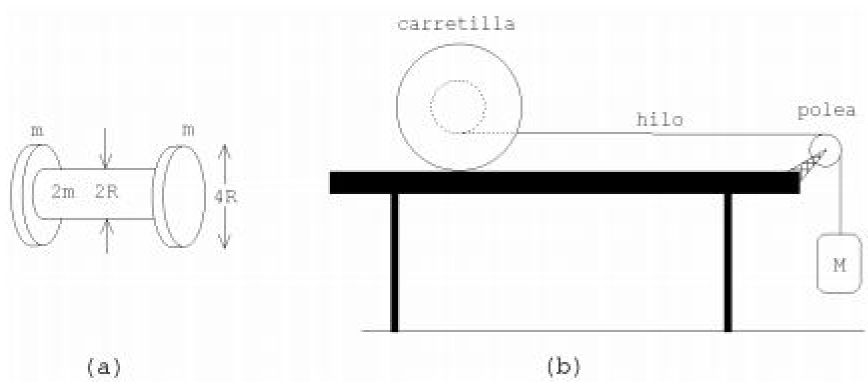


P7. [Sólidos Rígidos - Rodadura] Una carretilla de hilo, formada de dos discos y un cilindro de las dimensiones indicadas en la figura, se tira del hilo que tiene enrollado en la configuración mostrada en la figura. La carretilla rueda sin resbalar.

a) Determine el momento de inercia de la carretilla con respecto a su centro.

b) Determine el momento de inercia de la carretilla con respecto al punto de contacto con el plano horizontal.

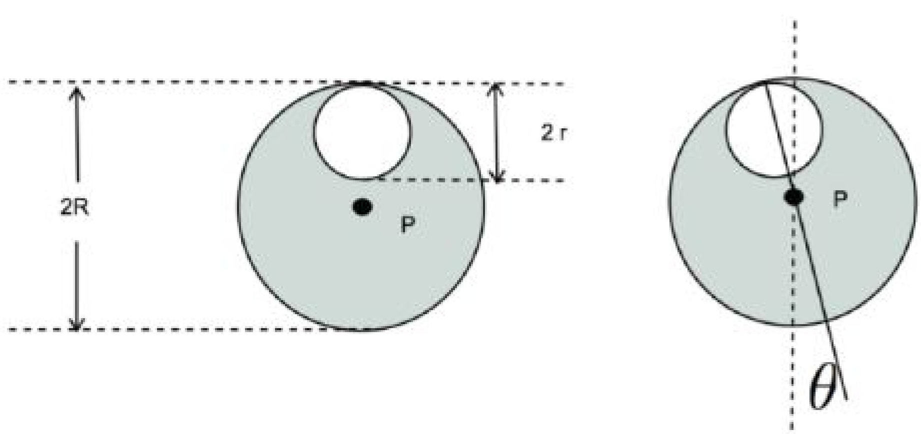
c) Encuentre la aceleración de la carretilla de hilo.



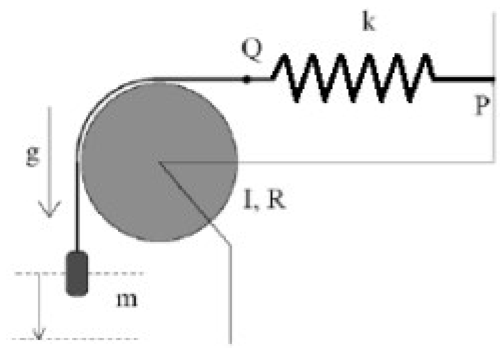
P8. [Oscilaciones] Consideremos un disco uniforme de masa M y radio R. Del disco se retira el material contenido en el interior una circunferencia de radio r ($r < R$) ubicada en la periferia. El sistema resultante se ilustra en la figura. El objeto se pivotea en el punto P, correspondiente al centro geométrico del disco original.

a) Determine la ecuación de movimiento para las desviaciones del sistema desde su posición de equilibrio vertical.

b) Encuentre el periodo de pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de equilibrio?



P9. [Oscilaciones Amortiguadas] El sistema de la figura consiste en una carga de masa m que pende de una cuerda ideal que en el punto Q se une a un resorte. El resorte, dispuesto en forma horizontal, está sujeto a una pared fija en el punto P. La constante elástica del resorte es k y su extremo en Q nunca entra en contacto con la rueda. Esta última tiene un radio R y momento de inercia I con respecto a su eje central, y además puede girar sin fricción en torno a este. La cuerda en contacto con la rueda nunca resbala. Si la carga es soltada del reposo desde la altura mínima para la cual el resorte no sufre estiramiento, determine la frecuencia de las oscilaciones del sistema.



P10. [Ondas Propagativas] Se tiene una cuerda de longitud $L = 10m$ extendida horizontalmente, de densidad $\rho = 3kg/m$ y tensión $T = 12N$. Los extremos de la cuerda se amarran a dos pistones, A y B, que se pueden mover verticalmente. En $t < 0$ la cuerda y los pistones están detenidos. En $t \geq 0$ Los pistones comienzan a moverse con la siguiente velocidad vertical:

$$v_A = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \vee t > 3s \\ 1cm/s & si \quad 0 < t < 2s \\ -2cm/s & si \quad 2s < t < 3s \end{cases} \tag{3}$$

$$v_B = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \vee t > 3s \\ 2cm/s & si \quad 0 < t < 1s \\ -4cm/s & si \quad 1s < t < 2s \\ 2cm/s & si \quad 2s < t < 3s \end{cases} \tag{4}$$

Para $t \geq 3s$ los pistones se mantienen en reposo.

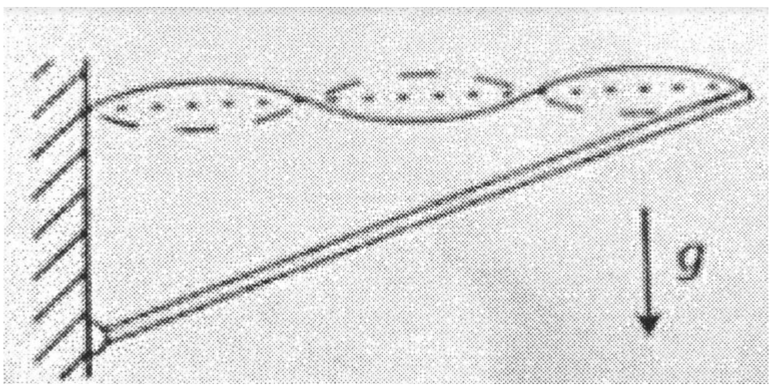
a) Grafique la forma de la cuerda $y(x)$ en $t = 3s$.

b) Grafique la velocidad transversal (vertical) de la cuerda $v_y(x)$, en $t = 3s$.

P11. [Ondas Estacionarias] Una barra de masa $M = 30kg$ y largo $L = 50cm$ se encuentra afirmada por uno de sus extremos a un pivote en una pared. Su otro extremo se sujeta mediante una cuerda de masa $m = 200g$ y longitud $l = 40cm$, la cual queda horizontal cuando el sistema está en equilibrio estático. En esta configuración la cuerda se hace oscilar en uno de sus modos normales. En $t = 0$, la cuerda tiene la forma que se muestra en la figura con línea sólida. Al respecto determine:

a) La velocidad de propagación de las ondas de la cuerda.

b) El tiempo t^* en el que la cuerda tiene la forma que se muestra en la figura con línea discontinua.



P12. [Hidrostática - Presión Colisional] Un balde con $5kg$ de arena se deja caer sobre una balanza durante 1 minuto. Determine y grafique el peso que registra la balanza hasta los 90 segundos considerando que los granos de arena no rebotan.

P13. [Hidrostática - Principio de Arquímedes] Un globo esférico de radio R lleno de helio (de densidad ρ) se amarra a una cuerda de masa m y largo L. Cuando se suelta, este levanta un tramo de la cuerda de largo h, para luego permanecer en equilibrio como se muestra en la figura. La masa del globo es M y la densidad del aire es ρ_a. Determine h.