

Pauta Auxiliar 10: Ondas Estacionarias

FI1002 - SIST. NEWT. 2018-1

CORREO: matiasvergara@uj.uchile.cl

PII Cuerda del Ukelele (Porque Ukelele >> Guitarra)

(a) Longitud de onda en el modo fundamental de oscilación

• Primero estudiamos las condiciones de borde sobre un ukelele:

$y(0) = 0$ (Amarrada en el puente)

$y(L) = 0$ (Amarrada en el clavijero)

Luego es un caso con **ambos extremos fijos**.

Así, tenemos la sigte. fórmula:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Como tratamos el **modo fundamental**, entonces $n=1$:

$$\lambda_1 = \frac{2 \cdot 0,7}{1} = 1,4 \text{ m}$$

(b) Velocidad con la que se propaguen las ondas en la cuerda

Podemos relacionar la velocidad con la frecuencia y la longitud de onda según:

$$v = \lambda \cdot \nu \rightarrow \text{Frecuencia}$$

$$v = 1,4 \cdot 190 = 266 \text{ [m/s]}$$

(c) Tensión

$$\therefore \text{usamos } v = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}$$

$$\Rightarrow T = v^2 \cdot \rho_L$$

$\Rightarrow$ Reemplazando v de (b)

$$\Rightarrow T = 495,3 \text{ [N]}.$$

(d) Frecuencia de oscilación con $n=2$, $n=3$ y $n=4$

Por (a) calculamos: $\lambda_2 = \frac{2L}{2} = 0,7 \text{ m}$

$$\lambda_4 = \frac{2L}{4} = 0,35 \text{ m}$$

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = 0,47 \text{ m}$$

Usando además que $v = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow \frac{nc}{2L}$ Propuesto: verificar $v = \frac{\lambda n c}{2L}$ cte.

$$v_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{266}{0,7} = 380 \text{ Hz}$$

$$v_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{266}{0,47} = 570 \text{ Hz}$$

$$v_4 = \frac{v}{\lambda_4} = \frac{266}{0,35} = 760 \text{ Hz}$$

(e) Disminuir largo efectivo, encontrar nueva frec. en modo primero:

$$\begin{aligned} L' &= L - 0,04 \\ &= 0,70 - 0,04 \\ &= 0,66 \text{ [m]} \end{aligned}$$

$$\text{Luego } v' = \frac{nc}{2L'}$$

con $n=1$, $c = 266 \text{ [m/s]}$, $L = 0,66 \text{ [m]}$:

$$v' = \frac{266 \text{ [m/s]}}{2 \cdot 0,66 \text{ [m]}} = [201,5 \text{ [Hz]}] \rightarrow \left[\frac{1}{s} \right]$$

(f) Afinar la cuerda buscando nota sol: $196 \text{ Hz} = v^*$ en modo fundamental ($n=1$)

Para ello encontramos la velocidad dada por la nueva frecuencia:

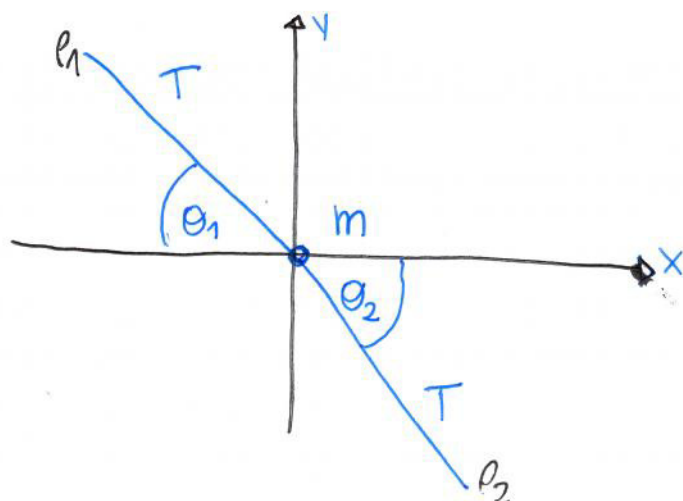
$$\begin{aligned} v^* &= \lambda \cdot v^* \\ &= 1,4 \text{ [m]} \cdot 196 \text{ [Hz]} \\ &= 274,4 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

Hacemos $v^* = c^* = \sqrt{\frac{T^*}{\rho_L}}$ y despejamos T^* :

$$v^{*2} \rho_L = T^*$$

$$(274,4)^2 \cdot (0,007) = T^* = 527,1 \text{ [N]} //$$

P2] Formular condición de borde



Newton:

$$T \sin \theta_1 - T \sin \theta_2 = ma$$

$$T(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = ma$$

Aproximación ángulos pequeños: $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial f}{\partial x}$

$$\Rightarrow T \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\theta_1} - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\theta_2} \right) = ma$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\theta_1} - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\theta_2} = \frac{m}{T} a$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\theta_1} - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\theta_2} = \frac{m}{T} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{x=0} //$$

P3] Nodos en una cuerda

1. Usando el Hint:

$$y = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

donde A , k y ω son, respectivamente, la amplitud, el número de ondas y la frecuencia angular de las ondas componentes, entonces, por comparación con nuestra onda:

$$2A = 10 \Rightarrow A = 5 \text{ cm}$$

Como en la ecuación $k = \frac{\pi}{3}$, y dado además que sabemos $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,

obtenemos:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 6 \text{ cm}$$

Y puesto que a su vez, $k = \omega/v$, la velocidad de propagación de las ondas componentes será:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{20\pi \cos(20\pi t)}{\pi/3} = 60 \text{ cm/s}$$

2. Distancia entre nodos

La distancia entre dos nodos consecutivos es $\frac{\lambda}{2}$, así: $d = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$

3. Vel. de osc. en $x = 4,5 \text{ cm}$ $t = 0,4 \text{ s}$

La vel. de osc. en un punto de la cuerda es:

$$v = \frac{dy}{dt} = -20\pi \left(10 \sin \frac{\pi}{3} x \right) \sin 20\pi t$$

Como puede verse, la velocidad de oscilación de un punto de una cuerda donde se ha establecido una onda estacionaria depende también de la posición, cosa que no ocurre con una onda viajera. Al sustituir el valor del tiempo ofrecido, comprobamos que $\sin(20\pi \cdot 0,4) = 0$, por lo que la **velocidad de oscilación**

de dicho punto en ese instante es cero. Sin embargo, dicho punto...

4. ¿Es un nodo? **no!** pues al sustituir el valor de x por el que se nos da en el enunciado, comprobamos que su amplitud es de -10 cm , por lo que se trata de un antinodo o vientre.

5. En una onda estacionaria no se produce transporte de energía, pues los nodos no oscilan en ningún momento, con lo cual resulta claro que a ellos no les llega ningún tipo de energía. Decimos entonces que la energía de una onda estacionaria se encuentra **confinada entre los nodos**.